МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Веригіна І. В., Островська О. В.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ та МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Частина 1. Випадкові події

ЛЕКЦІЇ і ПРАКТИКУМ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю 143 «Атомна енергетика», спеціалізацією «Атомні електричні станції»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

УДК 519.2(075,8)

Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 1. Випадкові події: Лекції і практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 143 «Атомна енергетика», спеціалізації «Атомні електричні станції» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. В. Веригіна, О. В. Островська. – Електронні текстові данні (1 файл: 1,99 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 57 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №9 від 24.05.2018 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 4 від 26.04.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
та МАТЕМАТИЧНАСТАТИСТИКА
Частина 1. Випадкові події
ЛЕКЦІЇ і ПРАКТИКУМ

Укладачі: *Веригіна Інга Вячеславівна, старший викладач*
Островська Ольга Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний
редактор *Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук, професор*

Рецензент: Проскурін Данило Павлович, *доктор фіз.-мат. наук, доцент* кафедри дослідження операцій факультету кібернетики КНУ імені Тараса Шевченка

У навчальному посібнику теоретичний матеріал подається у формі лекцій і супроводжується прикладами типових задач. Наприкінці кожної лекції наведено перелік основних запитань для самоконтролю знань і достатню кількість завдань для проведення практичних занять. Розміщено завдання для підсумкового контролю.

Навчальний посібник рекомендовано для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

ЗМІСТ

Передмова

У природі немає жодного процесу, в якому б не був присутній елемент випадковості. Випадкові відхилення супроводжують будь-яке закономірне явище. Теорія ймовірностей як наука виникла на основі спостереження, що поведінку великої кількості однорідних випадкових подій можна описати за допомогою детермінованих закономірностей. Сьогодні практично немає жодної галузі науки, в якій не застосовуються ймовірнісні методи: фізика, економіка, радіотехніка, біологія, медицина, фізіологія, кібернетика, соціологія, психологія, філологія, лінгвістика та ін.

У процесі здобуття вищої освіти математико-статистичні дисципліни традиційно вважаються найбільш складними для студентів. Цей навчальний посібник ставить за мету допомогти зрозуміти прикладний та практичний зміст проблем, які розв'язуються методами теорії ймовірностей та математичної статистики тим, хто вивчає ці курси як на стаціонарі, так і заочно.

Матеріал даного посібника подано у вигляді п'яти лекцій та п'яти відповідних практичних занять, у яких доступно та детально викладено теоретичні положення з доведенням основних теорем та формул, наведено багато прикладів, представлено велику кількість розв'язаних задач і задач для самостійного виконання. Розв'язані задачі дають можливість зрозуміти універсальність ймовірнісно-статистичного аналізу як інструменту розв'язання проблем, пов'язаних з ризиками та невизначеністю. Розроблено варіанти завдань для підсумкового контролю у вигляді контрольних робіт.

Навчальний посібник є результатом узагальнення багаторічного досвіду авторів при викладанні даної дисципліни у вищих начальних закладах . Тематика запропонованого матеріалу відповідає навчальній програмі курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика", розділ "Випадкові події", для студентів тепло-енергетичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, спеціальність 143 "Атомна енергетика". Навчальний посібник рекомендовано для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ЛЕКЦІЯ №1.
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей вивчає закономірності масових випадкових явищ, подій, величин, процесів.

1.1. Основні поняття теорії ймовірностей. Експеримент, випадкові події

Масові явища та процеси характеризуються багатократним повторенням деяких операцій, дій, дослідів, тощо. Абстрагуючись від специфічних властивостей цих операцій, у теорії ймовірностей вводять поняття *експерименту* ***(E)*** *(або випробування, спостереження)*.

Під *експериментом* ***(E)*** будемо розуміти можливість виконувати один і той самий комплекс умов довільне число раз (хоча б тільки теоретично) та спостерігати результат.

Спостерігати результат означає, що ми фіксуємо деякий факт, наслідок, результат експерименту, який ми називаємо *випадковою подією* (або просто *подією*). У результаті експерименту подія може відбутися, а може і не відбутися.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.1.1. ***E*** – підкидання монети. У результаті цього експерименту можемо очікувати появу таких подій:
A=”випав “герб”” або
B=”випала “цифра””.
Звертаємо увагу, що події позначаємо великими латинськими літерами, а їх “зміст” пояснюємо у лапках.

Приклад 1.1.2. ***E*** – підкидання грального кубика. Приклади подій:
A=”випала парна кількість очок”,
B=”випала кількість очок, що більша або рівна 3”,
C=”випали “1” або “5” очок”, тощо.
Зрозуміло, що в результаті цього експерименту кількість подій, які ми можемо очікувати, значно більша, ніж у попередньому прикладі.

Приклад 1.1.3. ***E*** – гральний кубик підкидається двічі. Приклади подій:
A=”випало дві однакові цифри”,
B=”сума очок, що випали, кратна 6”,
C=”випало тільки “1” або “5” ”, тощо.

Приклад 1.1.4. ***E*** – складання іспиту студентом. Події:
A=”іспит складено”,
B=”іспит не складено”,
C=”іспит складено на оцінку “A” ”, тощо.

Як бачимо, події можуть бути простими і більш складними. Всі події поділяють на елементарні та складні.

1.2. Елементарні події. Простір елементарних подій

Серед усіх можливих подій, які можуть відбутися в результаті експерименту виділимо *елементарні події*. *Елементарною* назвемо подію, яку не можна представити як сукупність інших подій, а всі інші події можна подати через ці елементарні події. Елементарні події виключають одна одну. Результатом експерименту є одна і тільки одна з таких елементарних подій. Множина всіх елементарних результатів експерименту утворює *простір елементарних подій*. Простір елементарних подій позначається **Ω**, а елементарні події символами ω. Будь-яка випадкова подія подається через елементарні події, а отже є підмножиною простору елементарних подій.

Для прикладів експериментів, наведених у попередньому пункті, опишемо відповідні простори елементарних подій.

Приклад 1.2.1. ***E*** – підкидання монети.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, де ω_1 = ”випав “герб””, ω_2 = ”випала “цифра””.

Приклад 1.2.2. ***E*** – підкидання грального кубика.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де елементарні події ω_i = ”на верхній грані кубика випало *i* очок” , $i = \overline{1,6}$.

Тоді подія A= ”випала парна кількість очок” =$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$,

подія B= ”випала кількість очок, що більша або рівна 3”= $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$,

подія C=”випало “1” або “5” очок” = $\{\omega_1, \omega_5\}$.

Події A, B, C є підмножинами Ω.

Приклад 1.2.3. ***E*** – гральний кубик підкидається двічі.

$\Omega = \left\{\omega_{ij}, i, j = \overline{1,6}\right\}$, де елементарні події ω_{ij} =”при першому підкиданні випало *i* очок, при другому підкиданні - *j* очок”, тоді

A= ”випало дві однакові цифри” =$\{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}, \omega_{55}, \omega_{66}\}$,

B= ”сума очок, що випали, кратна 6” =$\{\omega_{15}, \omega_{24}, \omega_{33}, \omega_{42}, \omega_{51}, \omega_{66}\}$,

C= ”випали тільки “1” або “5” ” =$\{\omega_{11}, \omega_{15}, \omega_{51}, \omega_{55}\}$,

D=”сума очок більша 13” = $\varnothing$ (порожня множина, неможлива подія).

Приклад 1.2.4. ***E*** – складання іспиту студентом. Елементарні події:

ω_1 =”іспит складено на оцінку “A” ”,

ω_2 =”іспит складено на оцінку “B” ”,

ω_3 =”іспит складено на оцінку “C” ”,

ω_4 =”іспит складено на оцінку “D” ”,

ω_5 =”іспит складено на оцінку “E” ”,

ω_6 =”оцінка за іспит “Fx” ”,

ω_7 =”студент не допущений до складання іспиту, “F” ”.

ω_8 =”студент усунений з іспиту”.

Подія A=”іспит складено”=$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$,

подія B=”іспит не складено”=$\{\omega_6, \omega_7, \omega_8\}$,

подія C=”іспит складено на оцінку “A” ”=$\{\omega_1\}$.

Отже, наголосимо ще раз, що у розглянутих прикладах (а спільним в них є те, що простір елементарних подій є скінченою множиною) *випадкова подія є підмножиною простору елементарних подій,* $A \subset \Omega$, зокрема, подія A може збігатися з $\varnothing$ або Ω. У загальному випадку простори елементарних подій можуть бути також нескінченими (зліченими або незліченими).

1.3. Класифікація подій

1.3.1. Подія, яка в результаті експерименту не відбудеться за жодних умов, називається *неможливою.* Позначається $\varnothing$.

1.3.2. Подія, яка обов'язково відбудеться при будь-якому виконанні експерименту, називається *достовірною.* Позначається Ω.

1.3.3. Дві події A і B називаються *сумісними*, якщо в результаті експерименту вони можуть відбуватися одночасно. І відповідно, події A і B *несумісні*, якщо в одному випробуванні вони не можуть відбуватися одночасно.

Дивлячись на події як на підмножини Ω, маємо:

A і B – *сумісні* $\Leftrightarrow$ $A \cap B \neq \varnothing$;

A і B – *несумісні* $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$.

Застосуємо схематичне зображення подій за допомогою кругів Ейлера, прямокутником зображено простір елементарних подій **Ω**:

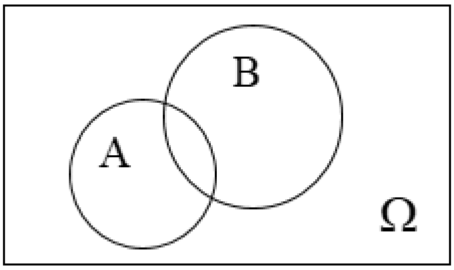


Рис.1. A і B – *сумісні*

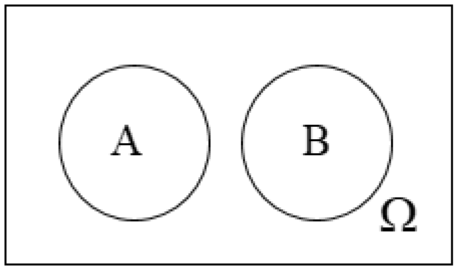


Рис.2. A і B – не*сумісні*

1.3.4. Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо подія $\bar{A}$ відбувається кожного разу, коли не відбувається подія A. Події $\bar{A}$ та A не можуть відбуватися одночасно.

$\bar{A}$ та A – *протилежні* $\Leftrightarrow$ $A \cap \bar{A} = \varnothing$ та $A \cup \bar{A} = \Omega$.

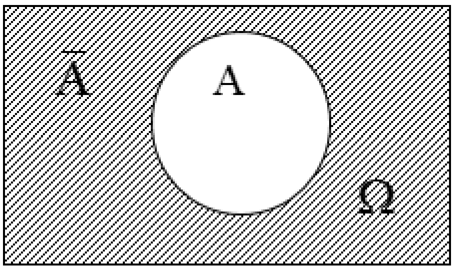


Рис 3. A і $\bar{A}$ – протилежні події.

1.3.5. Подія A *спричиняє (тягне за собою)* подію B (або з події A випливає подія B, або подія B є *наслідком* події A) означає: якщо відбулася подія A, то обов'язково відбулася і подія B. Дивлячись на події як на підмножини простору елементарних подій, маємо, що подія A є підмножиною події B.

Подія A *спричиняє* подію B $\Leftrightarrow$ $A \subset B$.

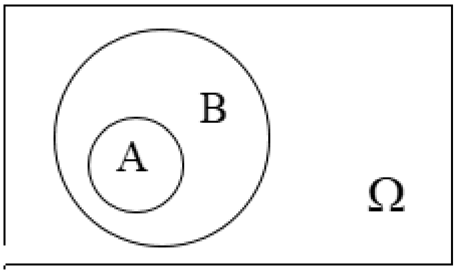


Рис. 4. $A \subset B$. Подія B – наслідок події A.

Якщо $A \subset B$ та одночасно $B \subset A$, то події A, B є *еквівалентними (рівними)*, $A = B$.

1.4. Операції над подіями

1.4.1. Сума подій

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A або B, або обидві одночасно. Позначається: $A + B = C$ ($A \bigcup B = C$).

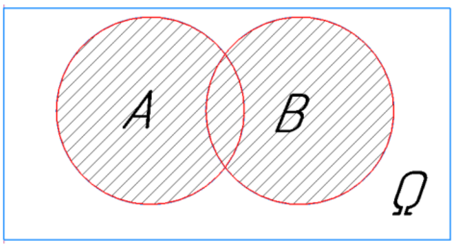


Рис.5. Сума двох подій A і B (зафарбована область).

1.4.2. Добуток подій

Добутком (перетином) двох подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді, коли події A та B відбуваються одночасно.

Позначається: $A \cdot B = AB = C$ ($A \bigcap B = C$).

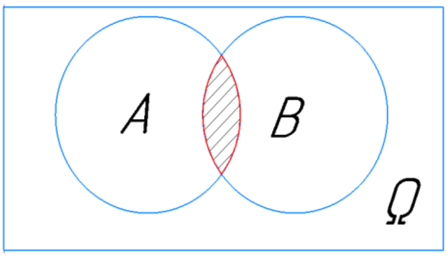


Рис.6. Добуток двох подій A і B (зафарбована область)

1.4.3. Різниця подій

Різницею двох подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді, коли відбувається подія A та не відбувається подія B.

Позначається: $A \setminus B = C$ ($A \setminus B = A\overline{B} = C$).

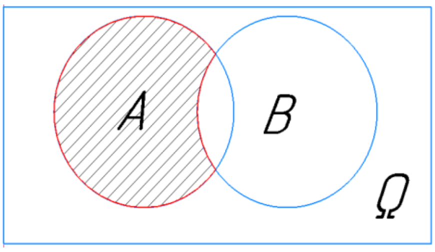


Рис. 7. Різниця подій A і B (зафарбована область).

Приклад 1.4.1. E – підкидання грального кубика. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, де ω_i= ”випало i очок”. Подія A= ”випала парна кількість очок” $=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, подія B=”випала кількість очок, що кратна 3”= $\{\omega_3,\omega_6\}$.

Сумою подій A і B є подія C=A+B=”кількість очок кратна або 2, або 3”= $\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$.

Добутком подій A і B є подія C=AB=”кількість очок кратна 2 та 3 одночасно (тобто, кратна 6)” $=\{\omega_6\}$.

Різницею подій A і B є подія C= $A\setminus B$ =”кількість очок кратна 2, але не кратна 3”=$\{\omega_2,\omega_4\}$. Різницею подій B і A є подія C= $B\setminus A$ =”кількість очок кратна 3, але не кратна 2”=$\{\omega_3\}$.

1.4.4. Властивості операцій над подіями

Дії додавання та множення подій задовольняють наступним законам:

- Комутативний: $A+B=B+A$ $\qquad A\cdot B=B\cdot A$
- Асоціативний: $(A+B)+C=A+(B+C)$

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

- Дистрибутивний (I): $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
- Дистрибутивний (II): $(A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$

Також неважко помітити (та довести) такі правила:

$A+A=A \qquad A+\varnothing=A \qquad A+\overline{A}=\Omega \qquad A+\Omega=\Omega$

$A\cdot A=A \qquad A\cdot\varnothing=\varnothing \qquad A\cdot\overline{A}=\varnothing \qquad A\cdot\Omega=A$

$\overline{\overline{A}}=A \qquad \overline{\varnothing}=\Omega \qquad \overline{\Omega}=\varnothing \qquad A\setminus B=A\setminus(A\cdot B)=A\cdot\overline{B}$

$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$; $\qquad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ (закони двоїстості або закони де Моргана)

Якщо $A\subset B$, тоді $A+B=B$ та $AB=A$.

1.5. Алгебра та σ - алгебра подій

Нехай множина Ω – простір елементарних подій, що відповідає даному експерименту, є скінченою множиною, $N(\Omega)=n$ – кількість елементарних подій, що складають Ω. Число підмножин множини Ω (включаючи $\varnothing$ та саму множину Ω), дорівнює 2^n. Отже, число всіх можливих випадкових подій, що відповідають даному експерименту, дорівнює 2^n.

Множина всіх подій, побудована у просторі елементарних подій Ω, називається *алгеброю* подій, позначається $\Re$, якщо справджується:

1) $\Omega \in \Re$;
2) Якщо $A, B \in \Re$, тоді $A + B \in \Re$, $A \cdot B \in \Re$, $A \setminus B \in \Re$.

У більш загальному випадку множина Ω може бути нескінченою (як зліченою, так і незліченою). Множина всіх подій $\Re$, побудована у нескінченому просторі елементарних подій, називається σ- *алгеброю* подій, якщо вона є алгеброю, тобто виконуються умови 1), 2) та також справджується:

3) Якщо $A_i \in \Re, i = \overline{1, \infty}$, тоді $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Re$, а тоді і $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Re$.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає теорія ймовірностей?

2. Що називають експериментом? Що таке простір елементарних подій?

3. Яка подія називається достовірною, неможливою?

4. Які події називають сумісними, несумісними, протилежними?

5. Які події називають еквівалентними?

6. Що називають сумою подій?

7. Що називають добутком подій?

8. Що називають різницею подій?

9. Назвіть властивості операцій над подіями.

Практичне заняття №1
Основні поняття теорії ймовірностей

Приклади розв'язування задач

Задача 1.1. Технічний контроль перевіряє якість трьох приладів. Описати:

а) простір елементарних подій,

б) подію A= "всі прилади якісні",

в) подію B= "хоча б один з приладів є неякісним",

г) подію C= "серед перевірених приладів рівно один неякісний".

Що означають події: д) A+B; є) AB; ж) B+C; з) BC ?

Розв'язання. Експеримент ***E*** – перевірка 3-х приладів.

Позначимо "Я" – прилад якісний, "Н" – прилад неякісний. Результати перевірки 3-х приладів можна записати так:

а) Простір елементарних подій -

$\Omega = \{"ЯЯЯ","ЯЯН","ЯНЯ","ЯНН","НЯЯ","НЯН","ННЯ","ННН"\}$.

б) Подія A="всі прилади якісні"=$\{"ЯЯЯ"\}$.

в) Подія B="хоча б один з приладів є неякісним"= $\{"ЯЯН","ЯНЯ","ЯНН","НЯЯ","НЯН","ННЯ","ННН"\}$.

г) Подія C= "серед приладів рівно 1 неякісний" = $\{"ЯЯН","ЯНЯ","НЯЯ"\}$.

Оскільки події A і B є протилежними, то: д) $A + B = \Omega$ - достовірна подія;

є) $AB = \varnothing$ - неможлива подія.

Зауважимо, що з події C випливає подія B, $C \subset B$, отже:

ж) $B + C = B$ = "хоча б один з приладів є неякісним" ;

з) $BC = C$ = "серед приладів рівно 1 неякісний".

Задача 1.2. Спростити вираз: $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$.

Розв'язання. Скористаємося законами і правилами для додавання і множення подій, що наведені у пункті 1.4.4. Розкриємо дужки та врахуємо, що $A\overline{A} = B\overline{B} = \varnothing$. Отримаємо:

$$(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B}) = (A+B)(\overline{A}A + \overline{A}\overline{B} + BA + B\overline{B}) = (A+B)(\overline{A}\overline{B} + BA) =$$

$$= A\overline{A}\overline{B} + ABA + B\overline{A}\overline{B} + BBA = \varnothing\overline{B} + AB + \varnothing\overline{A} + BA = AB + BA = AB$$

Відповідь: $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B}) = AB$.

Задача 1.3. Довести: $(A+B)(A+\overline{B}) + (\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B}) = \Omega$.

Розв'язання. Скористаємося законами і правилами для додавання і множення подій (п. 1.4.4). Розкриємо дужки, врахуємо, що $A\overline{A} = B\overline{B} = \varnothing$ та $A + \overline{A} = \Omega$:

$$(A+B)(A+\overline{B}) + (\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B}) = AA + A\overline{B} + BA + B\overline{B} + \overline{A}\overline{A} + \overline{A}\overline{B} + B\overline{A} + B\overline{B} =$$

$$= A + A\overline{B} + BA + \overline{A} + \overline{A}\overline{B} + B\overline{A} = \Omega + A\overline{B} + BA + \overline{A}\overline{B} + B\overline{A} = \Omega$$

Що і треба було довести.

Задача 1.4. Коли можлива рівність : $A+B=AB$?

Розв'язання. Спосіб I. Подія $A\subset A+B$ та $AB\subset A$ для довільних подій A,B. Оскільки $A+B=AB$, то $A=A+B=AB$. Аналогічно, $B=A+B=AB$. Отже, $A=B$.

Спосіб II. Домножимо обидві частини рівності на В, отримаємо:

$(A+B)B=(AB)B$, звідки $AB+BB=ABB \Rightarrow AB+B=AB$. Оскільки $AB\subset B$, то $AB+B=B$, отже $B=AB$. Аналогічно, $A=AB$. Звідки, $B=A$.

Відповідь: така рівність можлива, якщо $A=B$.

Задача 1.5. Чи сумісні події A та $\overline{A+B}$?

Розв'язання. Спосіб I. Нехай елементарна подія $\omega\in\overline{A+B}$, тоді за законом де Моргана $\omega\in\overline{A}\,\overline{B}$, звідки $\omega\in\overline{A}$, а отже, $\omega\notin A$. Події A та $\overline{A+B}$ несумісні.

Спосіб II. Розглянемо $A\cdot\overline{A+B}=A\cdot(\overline{A}\cdot\overline{B})=(A\cdot\overline{A})\cdot\overline{B}=\varnothing\cdot\overline{B}=\varnothing$.

Відповідь: Ні, несумісні.

Завдання для самостійного виконання

1. Технічний контроль перевіряє чотири вироби. Описати:

а) простір елементарних подій,

б) подію A=”хоча б один з приладів є бракованим”,

в) подію B=”серед перевірених приладів бракованих не менше 2-х”.

Що означають події г) $\overline{A}$; д) $\overline{B}$; є) $\overline{A}+\overline{B}$; ж) $\overline{A}\overline{B}$?

2. Спростити вираз:

а) $A(A+B)$; **б)** $A(A+\Omega)(B+\varnothing)$; **в)** $(A+B)(B+\Omega)(A+\varnothing)$;

г) $(A+B)(A+\overline{B})$.

3. Довести:

а) $(A+B)(C+B)=B+AC$; **б)** $A(A+C)(C+B)=AB+AC$;

в) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})=\varnothing$.

4. Коли можлива рівність : **а)** $A+B=\overline{A}$; **б)** $AB=\overline{A}$;?

5. Чи сумісні події **а)** A та $\overline{\overline{A}+B}$? **б)** B та $\overline{\overline{A}+B}$?

6. У мішень стріляють чотири рази. Розглядаються події: A_i=”влучення при *i*-му пострілі”, *i*=1,2,3,4 . Описати подію B=” в мішень влучили рівно один раз”.

7. Технічний контроль перевіряє три вироби. Нехай A_i, *i* =1,2,3 – подія, що означає наявність дефекту в *i*-му виробі. Записати подію: B=“хоча б один виріб виявився з дефектом”.

8. Нехай A,B,C,D – чотири довільні події. Знайти подію, що полягає в тому, що жодна з подій A,B,C,D не відбулася.

9. Маємо такі події: *A*=“навмання взята деталь I-го сорту”; *B*=” навмання взята деталь II-го сорту”; *C*=“навмання взята деталь III-го сорту”. Що означає подія $\overline{B+C}$?

10. Електронна схема містить два транзистори, два конденсатори і три резистори. Схема працездатна, якщо справними є хоча б один транзистор, обидва конденсатори і два резистори. Описати подію *D*=”схема працездатна” через події A_i=”i -ий транзистор справний”, *i*-1,2; B_j=”*j*-й конденсатор справний”, *j*=1,2; C_k=”*k*-й резистор справний”, *k*=1,2,3.

ЛЕКЦІЯ №2.
ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

2.1. Аксіоматичне означення ймовірності

Розглянемо простір Ω та будь-яку систему його підмножин $\Re$, що утворює σ - алгебру подій. Нехай на множині $\Re$ задано числову функцію, тобто *для кожної події* $A \in \Re$ *поставлено у відповідність число* $P(A)$, яке задовольняє наступним аксіомам:

A1: $P(A) \geq 0$ (*аксіома невід'ємності*);

A2: $P(\Omega) = 1$ (*аксіома нормування*);

A3: Якщо $A, B \in \Re$ та $AB = \varnothing$ (A, B - несумісні), то $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (*аксіома адитивності*).

A3′: Якщо $A_n \in \Re,\ n = 1, 2, ...$ та $A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j$ (A_i, A_j - попарно несумісні), то $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ або $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (*аксіома зліченої адитивності*).

Зрозуміло, що аксіома зліченої адитивності **A3′** є більш сильною умовою, і з неї зразу випливає аксіома адитивності **A3**. Але на практиці ми частіше будемо застосовувати цю аксіому у формі **A3**, тому і виділяємо її окремо.

Як наслідок, для трьох попарно несумісних подій A, B, C справджується: $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$. Аналогічно, для довільної скінченої кількості попарно несумісних подій.

Число $P(A)$ називається ***ймовірністю події*** A.

Ймовірність випадкової події – це деяка чисельна міра об'єктивної можливості появи випадкової події.

2.2. Властивості ймовірності

B1: $P(\varnothing) = 0$ (*ймовірність неможливої події*).

Доведення. $\Omega = \Omega + \varnothing \Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing)$. Оскільки $\Omega, \varnothing$ - несумісні, то за аксіомою **A3** $\Rightarrow P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing)$. Тоді за аксіомою **A2** $\Rightarrow 1 = 1 + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$.

B2: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (*ймовірність протилежної події*).

Доведення. $\bar{A} + A = \Omega \Rightarrow P(\bar{A} + A) = P(\Omega)$. Оскільки $\bar{A}, A$ - несумісні, то за аксіомою **A3** $\Rightarrow P(\bar{A}) + P(A) = P(\Omega) = 1$. Отже, дійсно, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

B3: Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$ (*ймовірність події, що є наслідком*).

Доведення. Оскільки $A \subset B$, то $A + \bar{A}B = B \Rightarrow P(A + \bar{A}B) = P(B)$. Оскільки $A, \bar{A}B$ - несумісні, то за аксіомою **A3** $\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}B) = P($. За аксіомою **A1** $P(\bar{A}B) \geq 0$. Тому $P(A) \leq P(B)$.

B4: $P(A) \leq 1$.

Доведення. Оскільки $A \subset \Omega$, то за властивістю **B3** $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

Отже, наголосимо ще раз*: ймовірність події - невід'ємне число, що не перевищує 1:*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Властивості ймовірностей сум подій

В5: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, для довільних подій А та В.

Пропонуємо довести самостійно.

В6: $P(A+B) \le P(A) + P(B)$, для довільних подій А та В (випливає з **В5**).

В7: $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$ для довільних А, В, С.

2.3. Класичне означення ймовірності

Нехай в результаті експерименту Е можна отримати n рівноможливих елементарних подій. Подія А відбувається, якщо відбувається m з цих елементарних подій (або говорять, m – кількість елементарних подій, що сприяють події А, $m \le n$). Тоді ймовірність події А:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) називається *формулою класичної ймовірності*.

Приклад 2.1. Із урни, що містить 10 куль, серед яких 7 білих, навмання дістанемо одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята біла куля?

Розв`язання: Ймовірність події $\text{P(A)} = \frac{7}{10}$.

Покажемо, що класична схема може бути записана через **аксіоматичне означення ймовірності.**

Простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Всі події рівноможливі, тому $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$. Подія А$\subset\Omega$ складається з m елементів, $A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\right\} = \bigcup_{k=1}^{m} \omega_{i_k}$ - є об'єднанням *m попарно несумісних подій.*

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + ... + P(\omega_{i_m}) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

При цьому виконуються аксіоми **А1-А3**:

1) $P(A) = \frac{m}{n} \ge 0$; 2) $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$; 3) якщо $A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\right\}$ (складаєься з m елементарних подій), $B = \left\{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_s}\right\}$ (складаєься з s елементарних подій) та $AB = \varnothing$, тоді $P(A+B) = \frac{m+s}{n} = \frac{m}{n} + \frac{s}{n} = P(A) + P(B)$.

2.4. Статистична ймовірність

Нехай експеримент ***E*** проведено n разів, а подія А з`явилась m разів. Відносна частота події А (або статистична ймовірність) дорівнює відношенню числа випробувань, у яких подія A відбулась, до числа фактично виконаних випробувань. Позначають:

відносна частота події $W(A)=\dfrac{m}{n}$

або статистична ймовірність $P^*(A)=\dfrac{m}{n}$.

Якщо ще раз провести експеримент навіть ту саму кількість *n разів*, m може змінитись, тобто $P^*(A)=W(A)$ не є повністю об`єктивною мірою.

Ймовірністю події A називається число, щодо якого стабілізується відносна частота події $W(A)$ за необмежено великої кількості випробувань: $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}W(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P^*(A)$.

Ймовірності подій за статистичним визначенням обчислюється тільки після проведення серії випробувань, які можна відтворювати необмежену кількість разів при одному й тому самому комплексі умов або ж на основі колишніх даних. Для подій має бути характерною статистична стійкість.

Відомі такі експерименти в історії статистики. ***E*** – підкидання монети, подія A=”випав герб (“Г”)”. Результати подамо у вигляді таблиці:

Виконавець експерименту	n- число підкидань	m-число появи“Г”	Статистична ймовірність P*(A) = $\frac{m}{n}$
Бюффон	4040	2048	0,508
Пірсон	12000	6019	0,5016
Пірсон	24000	12012	0,5005

Як бачимо, статистична ймовірність P*(A) має тенденцію бути стійкою величиною, при збільшенні *n:* P*(A) → 0,5. Неважко бачити, що статистична ймовірність P*(A) задовольняє (всі три) аксіоми **A1-A3**.

2.5. Геометричне означення ймовірності

Нехай всі можливі результати експерименту ***E*** зображаються точками, які неперервно заповнюють деяку область Ω евклідового простору (одно-, дво- або тривимірного). Розглянемо подію, яка зображається деякою частиною Ω, A⊂Ω.

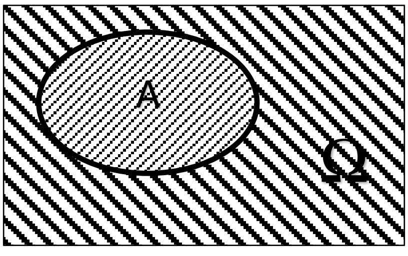


Рис. 8.

Ймовірність події A визначається рівністю:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} \ , \qquad (2.2)$$

де *“mes”*- міра областей (довжина, площа або об`єм).
Ймовірність, яка задається формулою (2.2), називається *геометричною ймовірністю.* Для геометричної ймовірності виконуються аксіоми **A1-A3**:

1) $P(A) \geq 0$; 2) $P(\Omega) = \frac{mes(\Omega)}{mes(\Omega)} = 1$; 3) Якщо $A \cap B = \varnothing$, то

$$P(A+B) = \frac{mes(A \cup B)}{mes(\Omega)} = \frac{mes(A) + mes(B)}{mes(\Omega)} = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} + \frac{mes(B)}{mes(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

Приклад 2.2. На відрізку $\Omega = [0;1]$ випадковим чином з’являється точка. Яка ймовірність того, що вона попаде в інтервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$?

*Розв`язання***.** $P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}$, $l(A)$ - довжина інтервалу $A = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$l(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, а $l(\Omega)$ - довжина відрізка Ω , $l(\Omega) = 1$. Отже, $P(A) = \frac{1}{3}$.

Приклад 2.3. На площині проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює *2a*. На площину кинуто монету радіуса *r* *(r<a)*. Знайти ймовірність того, що монета не перетинає жодну з прямих.

*Розв`язання***.** Схематично покажемо різні випадки розташування монети на площині. Зрозуміло, що положення монети повністю визначається положенням її центра.

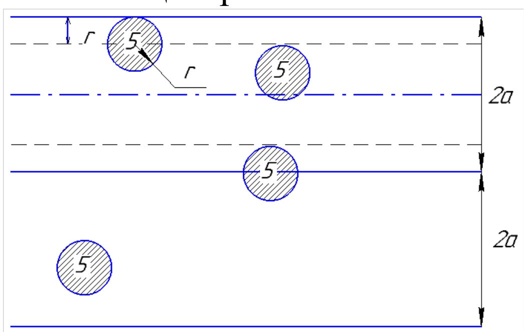


Рис. 9.

Монета не перетинає жодну з прямих, якщо її центр попадає в полосу, що розташувалася посередині між паралельними прямими на відстані *r* від прямих. Тоді ймовірність події $P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{2(a-r)}{2a} = \frac{a-r}{a}$**.**

Задача 2.4.(Задача про зустріч) Двоє друзів домовилися зустрітися між 9-ою і 10-ою годинами у певному місці. Домовились, що чекатимуть один одного не більше 15 хв. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

Розв`язання. Нехай *x* (хв) – час приходу після 9 години першого з друзів, а *y* (хв) – час приходу другого.

Множина всіх можливих значень часу приходу кожного з друзів – $\Omega = \{(x,y) \mid \quad 0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$.

Подія А=”зустріч відбулася” – означає, що різниця між часоим приходу друзів не перевищує 15 хвилин.

$A = \{|x-y| \le 15\} = \{-15 \le x-y \le 15\} = \{y \le x+15,\ y \ge x-15\}$.

Зобразимо множини A, Ω на координатній площині.

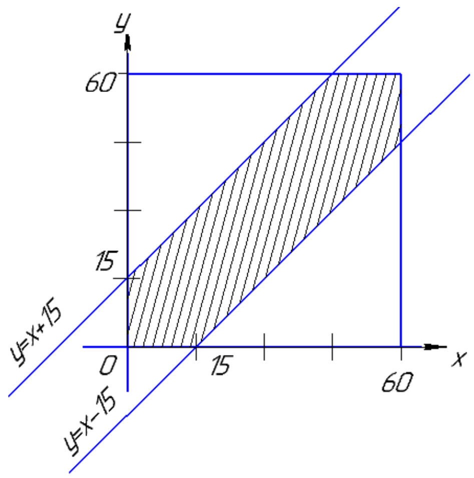


Рис. 10

Знайдемо ймовірність події А (за означенням геометричної ймовірності): $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$, де $S(A)$ – площа області, що відповідає події А, $S(\Omega)$ – площа області, що відповідає простору елементарних подій Ω.

$S(\Omega) = 60 \cdot 60 = 3600,\ S(A) = 3600 - 2025 = 1575.$ Остаточно, $P(A) = \dfrac{1575}{3600} \approx 0,44.$

Задача 2.5. Задача Бюффона про голку (задачу було сформульовано французьким природодослідником та математиком Ж.Л. Бюффоном у 1733 р., її розв’язання надруковано у 1777 р.).

На поверхні стола проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює *2a.* На стіл кидають голку, довжина якої *2l (2l<2a).* Яка ймовірність того, що голка перетне одну з прямих?

Розв`язання. Нехай ***y*** - відстань від центру голки до найближчої прямої, $\boldsymbol{\varphi}$ – кут між голкою і прямою. Множина всіх можливих значень (φ, y) - простір ементарних подій $\Omega = \{(\varphi, y) \mid 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le y \le a\}$.

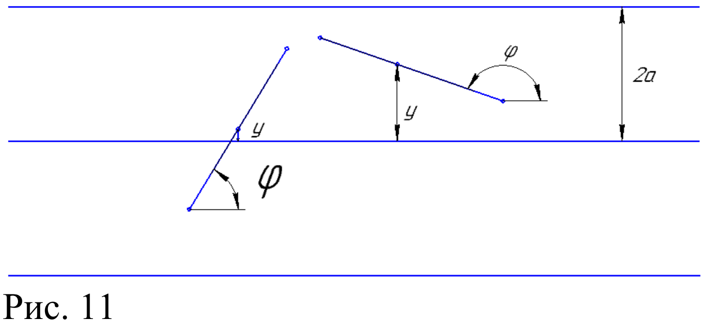


Рис. 11

Подія A=”голка перетинає пряму”= $\{(\varphi, y): y \le l\sin\varphi\}$.

Зобразимо на координатній площині множини Ω і A:

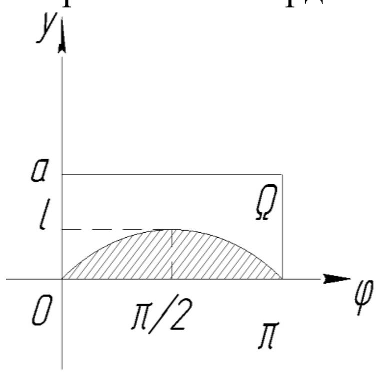


Рис. 12

За геометричною ймовірністю $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$, $S(\Omega) = a\pi$,

$S(A) = \int\limits_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi = l\cdot(-\cos\varphi)|_0^{\pi} = l(1+1) = 2l$. Таким чином, $P(A) = \dfrac{2l}{a\pi}$.

Задача Бюффона використовується для статистичного знаходження числа π . Це один із перших прикладів застосування метода Монте-Карло (чисельний метод розв’язування математичних задач за допомогою моделювання випадкових величин). З останньої рівності виразимо π: $\pi = \dfrac{2l}{aP(A)}$. Якщо експеримент по киданню голки виконати досить велику кількість разів та знайти частоту того, що голка перетинає прямі, тобто знайти статистичну ймовірність (див. пп. 2.4.) $P^*(A) \approx P(A)$, то $\pi \approx \dfrac{2l}{aP^*(A)}$.

Відомо про реалізацію цього експерименту в 1849 р. Вольфом, який підкидав 5000 разів голку довжиною 36 мм при відстані між прямими 45мм та отримав, що у 2532 випадках голка перетнула прямі, отже значення константи

$$\pi \approx \frac{36}{22{,}5\cdot\dfrac{2532}{5000}} = \frac{36}{11{,}394} \approx 3{,}159 .$$

Також у 1864 р. капітан Фокс 500 разів підкидав голку довжиною 3см при відстані між прямими 4см та отримав, що у 236 випадках голка перетнула прямі, отже отримав $\pi \approx 3{,}1780$

Для знаходження числа π цим оригінальним способом формулу Бюффона можна спростити, якщо відстань між паралельними прямими взяти у 2 рази більше довжини голки: $a=2l$, тоді

$$\pi \approx \frac{1}{P^*(A)}. \qquad \text{Або} \qquad \pi \approx \frac{n}{m},$$

де n – загальне число підкидань, а m – число випадків, коли голка перетнула паралельні лінії.

Запитання для самоконтролю

1. *Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.*

2. *Назвіть властивості ймовірності та наведіть приклади.*

3. *Сформулюйте класичне означення ймовірності. Наведіть приклади.*

4. *Сформулюйте статистичне означення ймовірності.*

5. *Сформулюйте геометричне означення ймовірності. Наведіть приклад.*

Практичне заняття №2
Визначення ймовірності подій

2.6. Елементи комбінаторики

При обчисленні ймовірностей часто потрібно підраховувати кількість елементарних подій (сприятливих для появи даної події та всіх можливих). Комбінаторика - це розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Факторіалом натурального числа n називається добуток всіх послідовних натуральних чисел від 1 до n включно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n; \; 0! = 1 \tag{2.1}$$

Множина – одне з основних неозначуваних понять математики, яке можна описати як сукупність однотипних об'єктів, об'єднаних за певною ознакою. Позначають множини, як правило, великими латинськими літерами $(A, B, C, \ldots)$, а їх елементи малими $(a, b, c, \ldots)$.

Підмножиною деякої множини A називається така множина B, кожен елемент якої належить також множині A. Позначення: $B \subset A$.

Упорядкованою називається множина, якщо про кожні два її елементи можна говорити, що один з них передує іншому (інакше кажучи, якщо на множині задане відношення порядку).

Розміщення із n елементів по k – це упорядковані підмножини, що містять k різних елементів із заданої множини n елементів.

Кількість розміщень із n по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.2}$$

Властивість 1. Якщо $n, \, k \in N$ і $k < n$, то $A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k), \; A_n^0 = A_0^0 = 1.$

Розміщеннями з повтореннями із n елементів по k називаються такі розміщення, які можуть містити також однакові елементи.

Кількість розміщень з повтореннями із n по k позначають $\overline{A}_n^k$ і знаходять за формулою:

$$\overline{A}_n^k = n^k \ . \qquad (2.3)$$

Перестановки із n елементів – це розміщення, які містять по n елементів (інакше: перестановки це упорядковані множини, що містять n елементів із заданої множини n елементів).

Кількість перестановок із n елементів позначають P_n і знаходять за формулою:

$$P_n = n! = A_n^n \ . \qquad (2.4)$$

Комбінаціями (сполученнями) із n елементів по k – це всі неупорядковані підмножини, що містять k різних елементів із заданої n-елементної множини.

Кількість комбінацій із n по k поначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{A_n^k}{P_k} \qquad (2.5)$$

Властивість 2. Якщо $n,\ k \in N$ і $k < n$,то

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k,\ k < n, C_n^0 = C_n^n = 1,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n$$

Правило суми. Якщо множина A містить n елементів, а множина $B-$ m елементів $\left(A \cap B = \varnothing\right)$, то множина $A+B$ містить $n+m$ елементів.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати k способами і після кожного з цих виборів об'єкт B у свою чергу можна вибрати m способами, то вибір A і B можна здійснити $k \times m$ способами.

Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Скільки тризначних чисел можна скласти із 10 карток, на яких написані цифри від 0 до 9?

Розв'язання. Відзначимо перш за все, що цифри в представленні чисел повторюватись не можуть (тому що є лише 10 карток із різними цифрами), крім того, перша цифра не може бути 0. Таким чином, усі тризначні числа є упорядкованими підмножинами, що складаються з трьох елементів множини цифр {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, тобто розміщеннями із 10 по 3, з яких вилучено всі ті, які починаються нулем.

Кількість усіх розміщень із 10 по 3 знайдемо, користуючись (1.2)

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Кількість розміщень із 10 по 3, у яких на першому місці стоїть 0, рівна кількості розміщень із 9 (без цифри 0) по 2.

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 8 \cdot 9 = 72$$

Отже, шукана кількість тризначних чисел $A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648.$

Відповідь: 648.

Задача 2.2. Студенти одного з курсів вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день слід запланувати три лекції з різних предметів?

Розв'язання. Кількість таких способів дорівнює числу розміщень з 8 предметів по 3: $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Відповідь: 336.

Задача 2.3. Команда з "Клубу знавців" у складі 6 осіб займає місця за круглим столом. Скільки існує можливих варіантів розміщення гравців? Скільки таких варіантів у випадку, коли два відібрані гравці команди повинні сісти поруч?

Розв'язання. У першому випадку кількість варіантів розміщення гравців дорівнює числу перестановок з 6 елементів, тобто $P_6 = 6! = 720$. У другому випадку для двох виділених осіб є 6 різних сусідніх пар місць, на кожному з яких ці дві особи можуть сісти двома способами. Отже, посадити їх поруч можна 12 способами. На місця, що залишились, решту можна розсадити $P_4 = 4!$ способами. За правилом добутку дістаємо кількість усіх варіантів розміщень: $12 \times 4! = 288$.

Відповідь: 288.

Задача 2.4. Скільки потрібно купити карток лотереї "Спортлото 5 із 36 ", щоб напевне вгадати усі 5 номерів майбутнього тиражу? Скільки грошей на це треба витратити, якщо одна картка коштує 2 грн.?

Розв'язання. Варіанти заповнень карток лотереї є неупорядкованими (порядок слідування вгаданих номерів ролі не грає) підмножинами по 5 елементів із множини 36 елементів, тобто є комбінаціями із 36 по 5. Щоб напевне вгадати усі 5 номерів лотереї, потрібно перебрати усі можливі комбінації із 36 по 5 і заповнити відповідні картки. Таких комбінацій, а отже, і карток, буде

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{(36-5)!5!} = \frac{36!}{31!5!} = \frac{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992$$

Для придбання такої кількості карток потрібно $376992 \times 2 = 753984$ грн.

Відповідь: 376992 картки , 753984 грн.

Задача 2.5. Розв'язати рівняння $A_7^x = x \cdot A_7^{x-1}$

Розв'язання. Оскільки $A_7^x = \dfrac{7!}{(7-x)!}$;

$A_7^{x-1} = \dfrac{7!}{(7-(x-1))!} = \dfrac{7!}{(8-x)!}$, то рівняння запишеться у вигляді

$\dfrac{7!}{(7-x)!} = \dfrac{x \cdot 7!}{(8-x)!}$, або $7!(8-x)! = x \cdot 7!(7-x)!$;

$(8-x)! = x(7-x)!$; $\quad 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (7-x) \cdot (8-x) = x \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (7-x)$;

$8 - x = x$; $\quad 2x = 8$; $x = 4$.

Відповідь: x=4.

2.7. Визначення ймовірності події. Формула класичної ймовірності. Геометрична ймовірність

Приклади розв'язування задач

Задача 2.6. При перевірці готової продукції було виявлено 14 бракованих деталей із 140 перевірених. Знайдіть відносну частоту кількості бракованих (якісних) деталей

Розв'язання. Скористаємося означенням відносної частоти: $w_1 = \frac{14}{140} = 0{,}1$ – бракованих та $w_2 = \frac{126}{140} = 0{,}9$ – якісних деталей.

Задача 2.7. Учасники жеребкування беруть із ящика навмання жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання взятого жетону не містить цифри 5.

Розв'язання. Серед жетонів, що містять цифру 5 наступні номери 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51,…, 59, 65, 75, 85, 95. Їх всього 19. А тих жетонів, що не містять цифри 5 – 81. Отже, за класичним означенням $P = \frac{81}{100} = 0{,}81$.

Задача 2.8. Серед 17 студентів групи, серед яких 8 дівчат, розігрується 7 білетів. Яка ймовірність того, що серед власників білетів виявиться четверо дівчат?

Розв'язання. Кількість всіх можливих варіантів розподілити 7 білетів між 17 студентами дорівнює числу комбінацій із 17 елементів по 7, тобто C_{17}^7. Відібрати чотирьох дівчат із восьми можна C_8^4 способами. Кожна четвірка дівчат може попадати з кожною трійкою хлопців із 9, а число таких трійок дорівнює C_9^3. Отже, число наслідків такого розподілу, за правилом добутку дорівнює $C_8^4 \times C_9^3$, а ймовірність шуканої події: $P(A) = \frac{C_8^4 \times C_9^3}{C_{17}^7} = \frac{735}{2431} \approx 0{,}302$.

Відповідь: 0,302.

Задача 2.9. На причалі очікується прибуття двох теплоходів з 10-ї до 11-ї години. Визначити ймовірність того що одному з теплоходів доведеться чекати іншого, якщо час стоянки першого теплохода – 15 хвилин, а другого – 25 хв.

Розв'язання. Позначимо x та y – час прибуття (у хвилинах) першого та другого теплоходів до причалу відповідно: $0 \le x \le 60$; $0 \le y \le 60$ (так як вони прибувають протягом години). Отже, простір елементарних подій G – точки квадрата $OABC$, рис.1. Нехай подія A – один з катерів буде чекати іншого. Оскільки простір G є неперервним то ймовірність $P\left(A\right)$ можна обчислити за геометричним означенням, тобто $P(A) = \frac{\text{mes}\, A}{\text{mes}\, G}$

Визначимо відповідну для події A множину точок площини G. В залежності від порядку приходу теплоходів може бути два випадки. Перший теплохід чекатиме другого, якщо він підійде до причалу протягом 25 хвилин після прибуття другого, тобто $x - y \le 25$. Аналогічно для другого випадку $y - x \le 15$. Отже, множина точок площини, що задовольняє систему нерівністей

$$\begin{cases} x - y \le 25 \\ y - x \le 15 \\ 0 \le x \le 60 \\ 0 \le y \le 60 \end{cases}$$

визначає шестикутник *OMNPQ*.

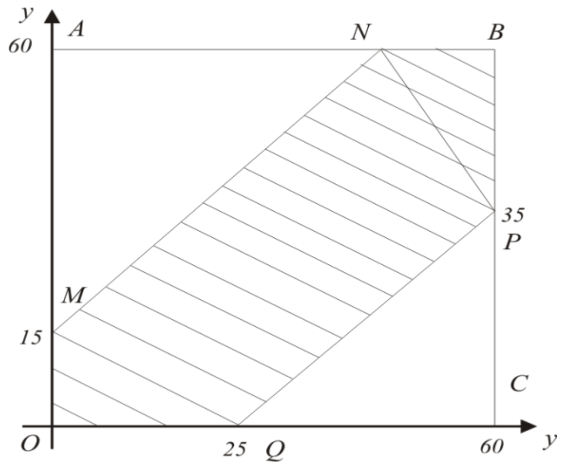


Рис. 13

$$S_{OABC} = 60^2, \quad S_1 = S_{OMNBPQ} = S - (S_{MAN} + S_{PCQ});$$

$$S_{MAN} = \frac{1}{2} AM^2 = \frac{1}{2} \cdot 45^2 = 1012{,}5,$$

$$S_{PCQ} = \frac{1}{2} CQ^2 = \frac{1}{2} \cdot 35^2 = 612{,}5,$$

$$P(A) = \frac{3600 - (1012{,}5 + 612{,}5)}{3600} = \frac{1975}{3600} \approx 0{,}55.$$

Отже, ймовірність того, що одному з теплоходів прийдеться очікувати іншого дорівнює 0,55.

Відповідь: 0,55.

Завдання для самостійного виконання

11. Наталочці було потрібно з Борщагівки дістатися на Теремки, заїхавши по дорозі до подруги, яка живе на Подолі. Проаналізувавши карту-схему Києва, Наталочка виявила, що з Борщагівки на Поділ є чотири автобусні маршрути, а з Подолу на Теремки – два. Скільки існує різних варіантів автобусної подорожі Наталочки з Борщагівки на Теремки через Поділ?

12. Учасники шахового турніру зіграли один з одним дві партії. Усього на цьому турнірі було зіграно 110 партій. Скільки шахістів брало участь у цьому турнірі?

13. Команди вищої ліги з футболу провели за сезон у двох колах розіграшу 240 матчів. Скільки команд у вищій лізі ?

14. У студентській групі з 23 осіб усі студенти вивчають або англійську мову, або іспанську мову, або обидві мови одразу. Відомо, що англійську мову вивчають 18 студентів цієї групи, а іспанську мову – 12 студентів. Скільки студентів цієї групи вивчають обидві мови?

15. Розв'язати рівняння:

А) $(n+4)! = 30(n-k)!\,A_{n+2}^{k+2}$ Б) $A_n^5 = 20A_{n-1}^4$

16. Підкидається гральний кубик. Подія A_i полягає в тому, що випадає число i, де $i=\overline{1,6}$. Позначимо події: $B=$"випадає парне число"; $C=$"випадає непарне число"; $E=$"випадає число не менше 2"; $F=$"випадає число більше 5". Знайти ймовірність події (за класичним означенням)

а) A_2; б) A_4; в) B;

г) C; д) E; е) F.

17. При стрільбі із гвинтівки відносна частота влучення в мішень дорівнює 0,85. Скільки буде влучень, якщо проведено 120 пострілів?

18. В аудиторії сидять m дівчат та n хлопців. Одна з дівчат виходить з аудиторії. Після того викладач навмання викликає студента до дошки. Яка ймовірність, що до дошки вийде хлопець?

19. Учитель попросив учня на відрізку $[-2;3]$ навмання позначити точку. Яка ймовірність того, що відстань від точки до початку координат більше 1?

20. У крузі радіуса 5 навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей круг квадрата.

Лекція №3
ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІ ПОДІЇ

3.1. Формули додавання ймовірностей

3.1.1. Формули додавання ймовірностей для *несумісних* подій

а) *Якщо події А, В – несумісні* ($AB = \varnothing$), то *ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей* (випливає з аксіоми **А3**):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{3.1}$$

б) Як наслідок, якщо події А, В, С попарно несумісні, тоді також *ймовірність суми подій дорівнює сумі їх ймовірностей:*

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) \tag{3.2}$$

в) Ця рівність справедлива і тоді, коли маємо суму скінченної кількості попарно несумісних подій:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

або

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{3.3}$$

3.1.2. Формули додавання ймовірностей для *сумісних* подій

а) *Ймовірність суми двох сумісних подій* ($AB \neq \varnothing$) *дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірністі їх добутку*:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{3.4}$$

б) Для трьох подій:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \tag{3.5}$$

Приклад 3.1. У колоді 52 карти. Оголошено козир. Яка ймовірність того, що витягнута навмання карта є козирем або тузом?

Розв'язання. Подія A=”витягнута карта є козирем”, подія B=”витягнута карта є тузом”. Події А та В можуть відбуватися одночасно, отже, є сумісними, $AB \neq \varnothing$. Добуток подій AB=”витягнута карта – козирний туз”.

$P(A) = \frac{13}{52}$, $P(B) = \frac{4}{52}$, $P(AB) = \frac{1}{52}$.

Подія А+В=”витягнута карта є козирем або тузом”.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \approx 0{,}308.$$

Відповідь: 0,308.

3.2. Умовні ймовірності

Нехай А і В – випадкові події, які мають ненульові ймовірності.

$$A, B \subset \Omega \text{ ; } P(A) \neq 0; P(B) \neq 0.$$

Нехай подія В відбулася. Поставимо питання:

Як це впливає на подію А? Чи змінилась ймовірність події А?

Позначимо $P\left(A/B\right)$ – умовна ймовірність або ймовірність події А, за умови, що подія В відбулася. Умовна ймовірність обчислюється за формулою:

$$P\left(A/B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (3.6)$$

Та навпаки: $$P\left(B/A\right)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (3.7)$$

Звідки отримаємо: $$P(AB)=P(B)\cdot P\left(A/B\right) \qquad (3.8)$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P\left(B/A\right) \qquad (3.9)$$

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, обчислену з урахуванням того, що перша подія відбулась.

Для трьох подій A, B, C:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P\left(B/A\right)\cdot P\left(C/AB\right) \qquad (3.10)$$

У випадку *n* подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (3.11)$$

Ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовні ймовірності інших; при цьому умовні ймовірності кожної наступної події обчислюються з урахуванням того, що всі попередні події відбулись.

Формули (3.8) – (3.11) – ***формули множення ймовірностей:***

Приклад 3.2. В урні 10 куль, з яких 7 білих. По черзі дістаємо 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві витягнуті кулі є білими.

Розв`язання. Нехай подія A=”перша куля біла” ; P(A) = $\frac{7}{10}$.

Подія B=”друга куля біла”, подія B/A=”друга куля біла, за умови, що перша куля була білою”. Умовна ймовірність $P\left(B/A\right)=\frac{6}{9}$.

Подія AB=”обидві кулі білі”. $P(AB)=P(A)\cdot P\left(B/A\right)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{42}{90}$.

Відповідь: $\frac{42}{90}$.

3.3. Незалежність подій

Означення. Подія A *не залежить від події* B, якщо умовна ймовірність події A дорівнює її безумовній ймовірності, тобто: $P\left(A/B\right)=P(A)$.

Іншими словами, виконання події B не впливає на ймовірність події A.

Означення. Подія B *не залежить від події* A, якщо $P\left(B/A\right)=P(B)$.

Нехай подія A не залежить від події B, тоді формула множення ймовірностей (3.8) перепишеться так:

$$P(AB)=P(B)P\left(A/B\right)=P(B)P(A). \qquad (3.12)$$

А з формули (3.9) отримаємо:

$$P(AB)=P(A)P\left(B/A\right). \qquad (3.13)$$

Порівняємо (3.12) та (3.13): $P(B)P(A)=P(A)P\left(B/A\right)$, (P(A)≠0) . Звідки $P(B)=P\left(A/B\right)$. Тобто, подія В не залежить від події А.

Таким чином, події А і В – ***взаємно незалежні***.

Також, якщо події А і В – незалежні, то має місце наступне правило.

Ймовірність добутку двох незалежних подій А та В дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (3.14)$$

Аналогічне твердження сформулюємо для скінченної кількості подій.

Ймовірність добутку декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\ldots P(A_n). \qquad (3.15)$$

Формули (3.14), (3.15) – це ***формули множення ймовірностей для незалежних подій***.

Можна довести, що якщо А, В – незалежні, то:

1) $\overline{A}$, В – незалежні;

2) А, $\overline{B}$ – незалежні;

3) $\overline{A}$, $\overline{B}$ – незалежні.

Декілька подій називаються *незалежними в сукупності*, якщо незалежними є кожні дві з них, і незалежними є довільна з подій і всі можливі добутки останніх подій.

Наприклад, у випадку трьох подій незалежними є події A_1 і A_2, A_1 і A_3, A_2 і A_3, а також A_1 і A_2A_3, A_2 і A_1A_3, A_3 і A_1A_2.

Ймовірність появи ***хоча б однієї*** *з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n) , \qquad (3.16)$$

де $P(\overline{A}_1), P(\overline{A}_2), \ldots, P(\overline{A}_n)$ - ймовірності появи протилежних подій.

Якщо всі n подій незалежні в сукупності і мають однакову ймовірність p, то останню формулу можна переписати у вигляді :

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-(1-p)^n=1-q^n. \qquad (3.17)$$

Зауваження. Поняття "залежності/незалежності" та "сумісності/несумісності" є різними, хоча певний зв'язок між ними можна встановити.

Несумісні події незалежними бути не можуть, тому що множини їх елементарних наслідків не перетинаються і ймовірність добутку цих подій дорівнює нулю, тоді як ймовірності кожної окремо взятої з цих подій не дорівнюють нулю.

Незалежні події обов'язково є сумісними. Наприклад, якщо в цеху є два верстати, які ніяк не пов'язані між собою за умовами виробництва, то простоювання кожного верстата – події сумісні і незалежні. Якщо ж верстати пов'язані єдиним технологічним циклом, то простоювання одного з них залежить від технічного стану іншого (залежні). При цьому вони можуть бути сумісними (в послідовному циклі) або несумісними (в паралельному циклі).

Разом з тим, якщо множини елементарних наслідків перетинаються (події сумісні), то події можуть бути як залежними так і незалежними.

Приклад 3.3. Опишемо події: А = “навмання вилучено з колоди карт карту пікової масті”, В = “навмання вилучено з колоди карт туз”. Ці події сумісні, тому що серед карт пікової масті є туз, а серед тузів – карта пікової масті. Крім того ці події незалежні:

$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ (оскільки в колоді 4 тузи). $P(B/A)=\frac{1}{9}$ (оскільки в колоді 1 туз із 9 карт пікової масті).

$P(\text{A})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $P(\text{A}/\text{B})=\frac{1}{4}$.

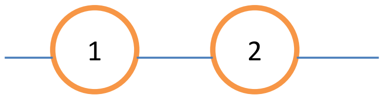
Приклад 3.4. Маємо набір 20 деталей, серед них 4 браковані і 16 якісних. Нехай подія А=”першого разу навмання витягли якісну деталь “, подія В = “другого разу навмання витягли якісну деталь”. Події А та В, сумісні, тому що може трапитись, що за першим та за другим разом буде вийнято якісні деталі. Події А та В залежні.

Попарна незалежність декількох подій ще не означає, що вони незалежні в сукупності. Припустимо, що грані правильного тетраедра зафарбовано: першу – в червоний колір (подія А), другу –в зелений (подія В), третю – в синій (подія С), четверту – в усі три кольори (подія А В С). Якщо тетраедр підкинути, то, ймовірність того, що тетраедр впаде на грань,що містить фарбу певного кольору, дорівнює - 0,5. Отже, $P(A)=P(\text{B})=\text{P}(\text{C})=\frac{1}{2}$. Розглянемо умовні ймовірності: $P\left(A/B\right)=P\left(A/C\right)=P\left(B/A\right)=P\left(B/C\right)=P\left(C/A\right)=P\left(C/B\right)=\frac{1}{2}$. Це означає, що події А, В, С попарно незалежні. Якщо ж відбудеться одночасно дві події, наприклад, А та В, тобто АВ, то подія С обов’язково відбудеться $P\left(C/AB\right)=P\left(B/AC\right)=P\left(A/BC\right)=1$. Отже, ймовірності кожної з подій А, В або С змінились, і події А, В,та С в сукупності залежні.

3.4. Розрахунок надійності системи

Надійністю системи (елементу, приладу) називається ймовірність того, що система (елемент, прилад) будуть працювати безвідмовно, без збоїв, впродовж деякого фіксованого часу Т.

Спочатку розглянемо двоелементні системи. Два елементи можуть бути об’єднані в систему двома способами: через послідовне або паралельне підключення.



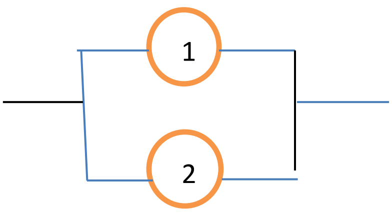


Рис.14. Схема А (послідовне підключення) Схема В (паралельне підключення)

Розглянемо події A_1=”елемент 1 працює без збоїв час Т”; A_2=”елемент 2 працює без збоїв час Т”. Нехай надійності елементів 1, 2: $P(A_1)=p_1$; $P(A_2)=p_2$.

Подія А=”Схема А працює без збоїв час Т”.

Подія В=”Схема В працює без збоїв час Т”.

Опишемо події А і В через події A_1, A_2: $A = A_1 \cdot A_2$; $B = A_1 + A_2$

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = \left| \begin{array}{l} \textit{Події незалежні, тому} \\ \textit{за формулою} \\ \textit{множення ймовірностей} \end{array} \right| = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2 ;$$

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = \left| \begin{array}{l} \textit{Події сумісні, тому} \\ \textit{за формулою додавання} \\ \textit{ймовірностей для сумісних} \\ \textit{подій} \end{array} \right| = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 .$$

Наприклад, при $p_1 = p_2 = 0{,}8$ $P(A) = 0{,}64$; $P(B) = 0{,}96$, тобто при паралельному підключенні елементів надійність схеми підвищується.

Ймовірність події В можна знайти іншим способом, через ймовірність протилежної події. Протилежна подія $\bar{B}$ =“схема не працює”. При паралельному підключенні це означає, що не працюють всі елементи схеми. $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Звідки

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Можна узагальнити отримані результати. Якщо потрібно оцінити надійність роботи системи, *n* елементів якої з’єднані послідовно, і відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента $p_i \ (i = 1, 2, 3, ..., n)$, то, позначивши надійність системи R, маємо $R = \prod_{i=1}^{n} p_i$.

У випадку паралельного з’єднання елементів $R = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i, \ \textit{де} \ q_i = 1 - p_i$.

Приклад 3.5. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}8$.

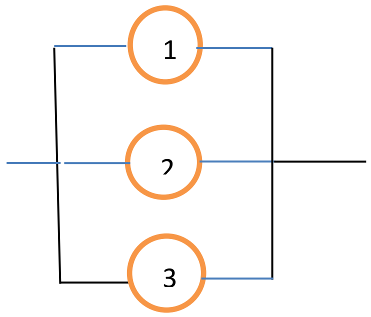


Рис. 15

Розв’язання. Нехай події A_i =”елемент *і* працює без збоїв час Т”; *і*=1,2,3. Подія А=”Схема працює” може бути подана через події A_i: $A = A_1 + A_2 + A_3$. Протилежна подія $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. Тоді $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3\right) =$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{Події } \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 - \\ \textit{незалежні} \end{array} \right| = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - (0{,}8)^3 = 0{,}488.$$

Відповідь: 0,488.

Запитання для самоконтролю

1.Запишіть формулу додавання ймовірностей для несумісних, сумісних подій. Наведіть приклади.

2. Дайте означення умовної ймовірності події. Наведіть приклади її обчислення.

3. Запишіть формулу множення ймовірностей для залежних подій (у випадку двох, трьох, n подій).

4. Які події називають незалежними?

5. Запишіть формулу множення ймовірностей для незалежних подій. Наведіть приклади.

6. Що розуміють під ймовірністю появи хоча б однієї з подій?

7. Які події є незалежними в сукупності?

8. Що таке надійність системи?

9. Чому дорівнює надійність схеми при послідовному та паралельному включенні n елементів?

Практичне заняття №3
ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклади розв'язування задач

Задача 3.1. В лотереї випущено 10000 білетів, серед яких 100 білетів з виграшем по 5 тис. грн., 200 – по 1 тис. грн., 500 – по 500грн., та 1000 – 200 грн., а решта без виграшу. Знайти ймовірність виграшу не менше 500 грн.,якщо придбали один білет.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A="виграш не менше 500 грн.", A_1 ="виграш становить 5 тис. грн.", A_2="виграш становить 1 тис. грн.", A_3 ="виграш становить 500 грн.". Оскільки куплено тільки один білет, то ці події попарно несумісні. За формулою додавання ймовірностей (3.1):

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{100}{10000} + \frac{200}{10000} + \frac{500}{10000} = 0,08\,.$$

Відповідь: P(A)=0,08.

Задача 3.2. В ящику 32 деталі, з яких 22 стандартні. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних деталей виявиться хоча б одна стандартна.

Розв'язання. Введемо позначення подій:

A="серед 5 відібраних деталей виявиться хоча б одна стандартна", протилежна подія $\overline{A}$="всі відібрані деталі є нестандартними". Отже,

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{32-22}^{5}}{C_{32}^{5}}=0,96$$

Відповідь: P(A)=0,96.

Задача 3.3. Підкидають два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що хоча б на одному кубику випаде три очки.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A=”хоча б на одному кубику випаде три очки”, A_1=”випало три очки на першому кубику”, A_2=”випало три очки на другому кубику”.

За умовою $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{6}$. Ці події сумісні і незалежні. Використаємо теорему додавання ймовірностей для сумісних подій:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cdot A_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=0,306$$

Відповідь: P(A)=0,306.

Задача 3.4. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити підкомітет із його членів. Яка ймовірність того, що всі троє в цьому підкомітеті будуть бухгалтерами?

Розв'язання. Введемо позначення подій:

A=”перший вибраний член підкомітету – бухгалтер”,

B=”другий вибраний член підкомітету – бухгалтер”,

C=”третій вибраний член підкомітету – бухгалтер”.

Ці події залежні. За теоремою множення ймовірностей залежних подій (формула (3.5)), маємо:

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)P\left({}^{B}\!/_{A}\right)P\left({}^{C}\!/_{AB}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}\approx 0,018.$$

Відповідь: P(ABC)=0,018.

Задача 3.5. В цеху два ткацькі верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не потребуватиме наладки оператора дорівнює 0,7, для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом години жоден з верстатів не потребуватиме наладки оператора.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A=”перший верстат не потребуватиме наладки оператора”, B=”другий верстат не потребуватиме наладки оператора”. Ці події незалежні. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій, маємо:

$$P(A\cdot B)=P(A)P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56.$$

Відповідь: P(AB)=0,56.

Задача 3.6. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A=”попасти в мішень хоча б при одному з чотирьох пострілів”. Отже, $P(A)=1-q^4$, де q - ймовірність промаху.

За умовою $P(A)=0,9984$, $q^4=1-0,9984=0,0016$. Отже $q=\sqrt[4]{0,0016}=0,2$. $p=1-q=1-0,2=0,8$.

Відповідь: q=0,8.

Задача 3.7. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів $p_1=p_2=p_3=0,8$.

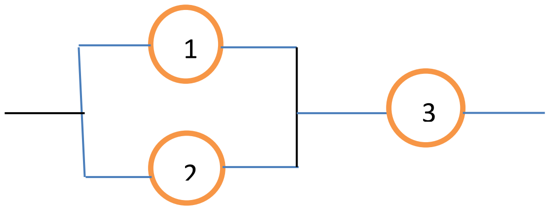


Рис. 16

Розв'язання. Нехай події A_i ="елемент *i* працює без збоїв час Т"; *i*=1,2,3.

Подія А="Схема працює" може бути подана через події A_i: $A=(A_1+A_2)\cdot A_3$. Обчислимо ймовірність події *A*:

$$P(A)=P\big((A_1+A_2)\cdot A_3\big)=\left|\begin{array}{l}\textit{Події } (A_1+A_2)\textit{ та } A_3 - \\ \textit{незалежні}\end{array}\right|=P(A_1+A_2)\cdot P(A_3)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Події } A_1\textit{ та } A_2 - \\ \textit{сумісні}\end{array}\right|=\big(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\big)\cdot P(A_3)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Події } A_1\textit{ та } A_2 - \\ \textit{незалежні}\end{array}\right|=\big(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)\big)\cdot P(A_3)=$$

$$=(0,8+0,8-0,64)\cdot 0,8=0,768.$$

Відповідь: P(A)=0,768.

Завдання для самостійного виконання

21. Підкидають три гральних кубики. Знайти ймовірності таких подій: а) на кожному кубику випало п'ять очок; б) на всіх кубиках випала однакова кількість очок.

22. Нехай ймовірність того, що потрібний покупцю розмір теніски знаходиться в першій, другій, третій, четвертій коробці відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що потрібний розмір теніски знаходиться: а) не більше ніж в трьох коробках; б) не менше ніж в двох коробках.

23. В цеху робітник обслуговує чотири верстати. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не потребуватиме наладки дорівнює 0,65, для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,8, для третього – 0,7, а для четвертого – 0,75. Знайти ймовірність того, що протягом години принаймні один верстат потребуватиме наладки.

24. Швачка обслуговує на фабриці три швейних автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години не вийде з ладу перший автомат дорівнює 0,7, для другого автомата така ймовірність дорівнює 0,8, а для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом години не вийде з ладу жоден швейний автомат.

25. Для оповіщення про аварію встановлені два незалежно працюючі сигналізатори. Ймовірність того, що перший сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95, для другого сигналізатора така ймовірність дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює тільки один сигналізатор.

26. Ймовірність влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність враження ціль при одному пострілі першою гарматою, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

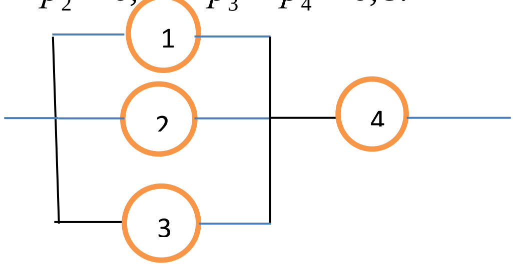
27. Відділ технічного контролю перевіряє деталі на стандартність. В результаті перевірки виявлено, що в кожному ящику є 90% стандартних деталей. Знайти ймовірність того, що з двох навмання відібраних деталей тільки одна є стандартною.

28. Під час сесії студент здає два заліки та чотири іспити. До кожного з заліків студент вивчив 70% питань, а до кожного з іспитів - 80% запропонованих питань. Знайти ймовірність того, що студент складе сесію.

29. Серед 12 телевізорів, які надійшли у ремонт, у п'яти з них треба замінити електронні компоненти, а у інших замінити деталі корпусу. Яка ймовірність того, що серед чотирьох телевізорів, взятих навмання майстром для ремонту, хоча б двом треба замінити електронні компоненти.

30. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів $p_1 = p_2 = 0{,}7; \quad p_3 = p_4 = 0{,}8.$

а)



б)

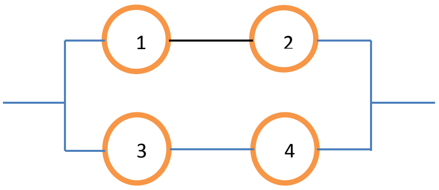


Рис. 17

Лекція №4
ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЙЄСА

4.1. Формула повної ймовірності

Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несумісні події, а разом $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

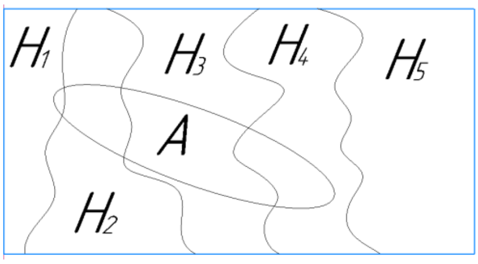


Рис. 18

$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$

Таку сукупність подій будемо називати *повною групою подій.*

Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називають *гіпотезами.*

Нехай A - деяка випадкова подія, $A \subset \Omega$. Подію A можна подати як суму подій: $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$.

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = \left| \begin{matrix} AH_1, AH_2, \ldots, AH_n - \\ \textit{несумісні} \end{matrix} \right| =$$

$$= P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P\left(A/_{H_1} \right) + P(H_2) \cdot P\left(A/_{H_2} \right) + \ldots + P(H_n) \cdot P\left(A/_{H_n} \right).$$

Ймовірність події A*, яка може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез)* $H_1, H_2, \ldots, H_n$*, що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події* A*:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A/_{H_1} \right) + \ldots + P(H_n) \cdot P\left(A/_{H_n} \right)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/_{H_i} \right). \tag{4.1}$$

Рівність (4.1) називається ***формулою повної ймовірності.***

Розглянемо приклади застосування формули повної ймовірності.

Приклад 4.1. В ящику міститься 12 деталей, що виготовлені на заводі №1, 20 деталей, що виготовлені на заводі №2, і 18 деталей, що виготовлені на заводі №3. Ймовірність того, що деталь, яка виготовлена на заводі №1, є якісною дорівнює 0.9, для деталей, які виготовлені на заводах №2 і №3, ці ймовірності дорівнюють 0.6 і 0.9 відповідно. Знайти ймовірність того, вибрана навмання деталь виявиться якісною.

Розв'язання. Розглянемо події:

H_1="деталь виготовлена заводом №1", H_2="деталь виготовлена заводом №2", H_3="деталь виготовлена заводом №3".

Імовірності цих подій: $P(H_1)=\frac{12}{50}$, $P(H_2)=\frac{20}{50}$, $P(H_3)=\frac{18}{50}$.

$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i)=\frac{12}{50}+\frac{20}{50}+\frac{18}{50}=1.$$

H_1, H_2, H_3 – несумісні. H_1, H_2, H_3 - утворюють повну групу подій

Подія $A=$ "деталь виявилась якісною".

$P\left(A/H_1\right)=|$ імовірність того, що деталь є якісною, за умови, що вона виготовлена заводом №1 | = 0.9;

$P\left(A/H_2\right)=|$ імовірність того, що деталь є якісною, за умови, що вона виготовлена заводом №2 | = 0.6;

$P\left(A/H_3\right)=|$ імовірність того, що деталь є якісною, за умови, що вона виготовлена заводом №3 | = 0.9 .

За формулою повної ймовірності (4.1):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$

$$=\frac{12}{50}\cdot 0{,}9+\frac{20}{50}\cdot 0{,}6+\frac{18}{50}\cdot 0{,}9=0{,}78.$$

Відповідь: $P(A)=0{,}78$.

Приклад 4.2. Є дві урни, у першій урні міститься 3 білих і 7 чорних куль, у другій урні - 6 білих і 4 чорних. З першої урни навмання вийняли одну кулю і переклали у другу урну, після того з другої урни дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля біла.

Розв'язання. Розглянемо події: H_1="з першої урни до другої переклали білу кулю", H_2="з першої урни до другої переклали чорну кулю".

$$P(H_1)=\frac{3}{10}, \quad P(H_2)=\frac{7}{10}. \quad P(H_1)+P(H_2)=1.$$

H_1, H_2 - утворюють повну групу подій.

Подія A="з другої урни витягли білу кулю".

$$P\left(A/H_1\right)=\frac{7}{11}, \qquad P\left(A/H_2\right)=\frac{6}{11}.$$

За формулою повної ймовірності (4.1):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}=\frac{21+42}{110}=\frac{63}{110}.$$

Відповідь: $P(A)=\frac{63}{110}\approx 0,57$.

4.2. Формули Байєса

В умовах попередньої задачі поставимо питання: нехай відомо, що куля, яку дістали з другої урни виявилася білою (подія А відбулася). Потрібно знайти ймовірність того, що з першої урни до другої було перекладено білу кулю (або чорну кулю).

$P\left(H_1/_{A}\right)$ – ймовірність того, що з І-ї урни до ІІ-ї переклали білу кулю, якщо відомо, що потім із ІІ-ї урни дістали білу кулю.

$$P\left(H_1/_{A}\right)=\frac{P(AH_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}}=\frac{21}{63}=\frac{1}{3}.$$

Аналогічно,

$$P\left(H_2/_{A}\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)}=\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}}=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}.$$

$P(H_1)=\frac{3}{10}=0.3$	$P\left(H_1/_{A}\right)\approx 0.33$
$P(H_2)=\frac{7}{10}=0.7$	$P\left(H_2/_{A}\right)\approx 0.67$
апріорні ймовірності	*апостеріорні ймовірності*

У загальному випадку маємо:

Нехай $H_1, H_2, \dots, H_n$ - події,що утворюють повну групу. Тоді для будь-якої події A, що може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, і такої, що $P(A)\neq 0$, виконуються рівності:

$$P\left(H_i/_{A}\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/_{H_i}\right)}{P(A)},\qquad i=1,\dots,n,$$

або

$$P\left(H_i/_{A}\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/_{H_i}\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+\dots+P(H_n)\cdot P\left(A/_{H_n}\right)}\tag{4.2}$$

Формули (4.2) називають ***формулами Байєса.***

Запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має формула повної ймовірності?

2. Як називають події H_i, $i = 1, 2, \ldots n$, у формулі повної ймовірності?

3.Чому дорівнює сума ймовірностей гіпотез?

4. В якому випадку доцільно використовувати формули Байєса?

5. Запишіть формулу Байєса.

6. Як зміниться ступінь довіри до вибраних гіпотез після випробування?

Практичне заняття №4

Формула повної ймовірності. Формули Байєса

Приклади розв'язування задач

Задача 4.1. У команді 5 стрільців: 3 чоловіка та 2 жінки. Ймовірність влучення у ціль у чоловіків – 0,95, у жінок – 0,9. Для пострілу в мішень навмання обрано одного стрільця. Яка ймовірність того, що в мішень буде влучено?

Розв'язання. Розглянемо такі гіпотези:

H_1 =”для пострілу було обрано чоловіка”,

H_2 =”для пострілу було обрано жінку”.

За класичним означенням ймовірності маємо: $P(H_1) = \frac{3}{5}$, $P(H_2) = \frac{2}{5}$.

Події H_1, H_2 - несумісні, утворюють повну групу подій.

Подія A =”у мішень влучено”.

$$P\left(A/H_1\right) = 0,95 , \qquad P\left(A/H_2\right) = 0,9 .$$

За формулою повної ймовірності (4.1):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A/H_1\right) + P(H_2) \cdot P\left(A/H_2\right) = \frac{3}{5} \cdot 0,95 + \frac{2}{5} \cdot 0,9 = 0,93 .$$

Відповідь: $P(A) = 0,93$.

Задача 4.2. На одній позиції імпульсного коду з однаковою ймовірністю може з'явитися 0 або 1. При передачі сигналу це значення може помилково змінитися. Ймовірність перетворення “0” в “1” дорівнює 0,01, ймовірність перетворення “1” в “0” дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що код буде передано вірно.

Розв'язання. Розглянемо такі гіпотези:

H_1 =”на позиції імпульсного коду з'явився “0””,

H_2 =” на позиції імпульсного коду з'явилася “1””.

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}\ .$$

Події H_1, H_2 - несумісні, утворюють повну групу подій.

Подія $A=$"код передано вірно".

$$P\left(A/_{H_1}\right)=1-0,01=0,99\ , \qquad P\left(A/_{H_2}\right)=1-0,004=0,996\,.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/_{H_2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,99+\frac{1}{2}\cdot 0,996=0,993\,.$$

Відповідь: $P(A)=0,993$.

Задача 4.3. На трьох фабриках виробляється відповідно 5000, 8000, 2000 електроламп. Відомо, що на першій фабриці питома вага браку у виготовленій продукції становить 0,3%, на другій – 0,2%, на третій – 0,5%. Куплена лампа виявилась бракованою. Визначити, на якій із фабрик найімовірніше була виготовлена бракована лампа.

Розв'язання. Введемо позначення подій: $A=$"куплена лампа бракована". H_1, H_2, H_3 - гіпотези, які полягають у тому, що куплена лампа виготовлена на першій, другій, третій фабриках відповідно, утворюють повну групу подій. За класичним означенням ймовірності маємо:

$$P(H_1)=\frac{5000}{5000+8000+2000}=\frac{5}{15}\ ,$$

$$P(H_2)=\frac{8000}{5000+8000+2000}=\frac{8}{15}\,,$$

$$P(H_3)=\frac{2000}{5000+8000+2000}=\frac{2}{15}\,,$$

$$P\left(A/_{H_1}\right)=0,003,\ P\left(A/_{H_2}\right)=0,002,\ P\left(A/_{H_3}\right)=0,005\,.$$

За формулами Байєса:

$$P\left(H_i/_{A}\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/_{H_i}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{3}P(H_j)\cdot P\left(A/_{H_j}\right)},\quad i=1,2,3$$

$$P\left(H_1/_{A}\right)\approx 0,37,\quad P\left(H_2/_{A}\right)\approx 0,39,\quad P\left(H_3/_{A}\right)\approx 0,24\,.$$

Отже, найімовірніше, що бракована лампа була виготовлена на другій фабриці.

Задача 4.4. В спортивному залі у сітці лежать 20 футбольних м'ячів, з них 12 нових, а 8 вже використовувались у грі. Тренер навмання бере із сітки 2 м'ячі для гри, а після гри повертає їх у сітку. Після цього із сітки знову виймає два м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що вийняті другого разу м'ячі виявляться новими.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A="обидва м'ячі при другому вилученні виявились новими". Розглянемо такі гіпотези про вміст сітки перед другим вилученням м'ячів: H_1="12 нових і 8, які були у грі", H_2="11 нових і 9,які були у грі", H_3="10 нових і 10, які були у грі".

Знайдемо ймовірності цих гіпотез. Якщо обидва м'ячі вже були у грі, то використовуючи класичне означення ймовірності:

$$P(H_1) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{14}{95}.$$

Для того, щоб мала місце гіпотеза H_2 - першого разу потрібно було вилучити 1 новий м'яч і 1 м'яч, який вже використовувався:

$$P(H_2) = \frac{C_{12}^1 C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95}.$$

Для того, щоб мала місце гіпотеза H_3- першого разу потрібно було вилучити 2 нових м'ячі:

$$P(H_3) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}.$$

Знайдемо умовні ймовірності події A:

$$P\left(A/H_1 \right) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{66}{190}, \qquad P\left(A/H_2 \right) = \frac{C_{11}^2}{C_{20}^2} = \frac{55}{190}, \qquad P\left(A/H_3 \right) = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{45}{190}.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(\mathrm{H}_1)P\left(A/H_1 \right) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_2)P\left(A/H_2 \right) + P(H_3)P\left(A/H_3 \right) =$$

$$= \frac{14}{95}\cdot\frac{66}{190} + \frac{48}{95}\cdot\frac{55}{190} + \frac{33}{95}\cdot\frac{45}{190} = 0,279.$$

Відповідь: $P(A) \approx 0,279$.

Задача 4.5. Три стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу, причому двоє з них влучили в мішень. Ймовірності влучення в мішень для першого, другого та третього стрільців відповідно дорівнюють 0,4, 0,3 і 0,5. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A="два стрільці влучили в мішень". Гіпотеза H_1="влучив перший стрілець", H_2="перший стрілець промахнувся". Отже за умовою $P(\mathrm{H}_1) = 0,4, P(\mathrm{H}_2) = 1 - 0,4 = 0,6$ (події H_1 і H_2 протилежні).

Знайдемо умовну ймовірність $P\left(A/H_1 \right)$ того, що в мішені два влучення, причому влучив перший і другий стрільці або перший і третій стрільці.

$$P\left(A/H_1 \right) = 0,3\cdot 0,5 + 0,5\cdot 0,7 = 0,5.$$

Знайдемо умовну ймовірність $P\left(A/H_2 \right)$ того, що в мішені два влучення, причому перший стрілець промахнувся, а влучили другий і третій.

$$P\left(A/H_2 \right) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15 .$$

Ймовірність того, що влучив перший стрілець, знайдемо за формулою Байєса:

$$P\left(H_1/A \right) = \frac{P(H_1)P\left(A/H_1 \right)}{P(H_1)P\left(A/H_1 \right) + P(H_2)P\left(A/H_2 \right)} = \frac{20}{29} .$$

Відповідь: $P\left(H_1/A \right) = \frac{20}{29}$.

Завдання для самостійного виконання

31. Два з трьох незалежно працюючих елементів деякого приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 та 0,3.

32. Продукція перевіряється на стандартність одним з двох контролерів, продуктивність праці яких 0,6 та 0,4 відповідно. Ймовірність того, що перевірена продукція була визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,95, а другим – 0,9. Перевірена продукція була визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що продукцію перевірив другий контролер.

33. В групі 20 студентів, серед них: 4 – відмінники, 8 – хорошистів, 6 – трієчників та 2 двієчники. До іспиту запропоновано вивчити 25 питань. Студент-відмінник вивчив всі питання, хорошист – 20 питань, трієчник – 15, а двієчник – 5 питань. Викликаний навмання студент відповів на три поставлені питання. Знайти ймовірність того, що це: а) хорошист; б) трієчник.

34. Курс долара підвищується протягом місяця з ймовірністю 0,8 і падає з ймовірністю 0,2. При підвищенні курсу долара компанія розраховує отримати прибуток з ймовірністю 0,75, а при пониженні – з ймовірністю 0,45. Знайти ймовірність того, що компанія отримає прибуток.

35. Три стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу, причому двоє з них влучили в мішень. Ймовірності влучення в мішень для першого, другого та третього стрільців відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 і 0,3. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.

36. В міську лікарню на протязі місяця потрапляє в середньому 50% хворих на грип, 40% хворих на ангіну та 10% хворих на запалення легень. Ймовірність одужати при захворюванні на грип 0,9, при ангіні – 0,8, при запаленні легень – 0,7. Хворий, який потрапив до лікарні, одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на ангіну.

37. В селищі Іванівка працюють дві будівельні компанії А та В,які пропонують свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом договору з компанією А становить 0,4, а з компанією В – 0,6. Ймовірність якісного виконання робіт компанією А – 0,7, а компанії В – 0,5. При укладанні договору з однією з компаній клієнт не отримав якісного виконання запланованих ним робіт. Знайти ймовірність того, що договір був укладений з компанією А.

38. В першій урні 2 білі і 4 чорні кулі, а в другій урні 3 білі і 1 чорна куля. З першої урни переклали в другу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що куля вийнята із другої урни після перекладання буде білою.

39. В урну, що містить 2 кулі, поклали білу кулю, після цього, з неї навмання вилучили 1 кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

40. На складі є 20 нових та 10 старих інструментів. Першій зміні робітників навмання видали 2 інструменти, які після використання були повернуті на склад. Друга зміна отримала 2 інструменти. Знайти ймовірність того, що друга зміна отримала 2 нових інструменти.

ЛЕКЦІЯ №5
СЕРІЇ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

5.1. Схема і формула Бернуллі.

Нехай експеримент ***E*** незалежно повторюється *n* разів – відбувається серія *n* незалежних випробувань, при цьому в кожному окремому випробуванні подія А може відбутися з ймовірністю *p* і не відбутися з ймовірністю *q*, *q=1-p*. Така серія випробувань називається ***схемою Бернуллі.***

Числа n і p називають параметрами схеми Бернуллі.

У схемі Бернуллі появу події А прийнято називати "*успіхом*". Поставимо задачу: знайти ймовірність того, що у серії *n* незалежних випробувань подія А відбудеться рівно *m* разів, або, іншими словами, що серед *n* випробувань буде рівно *m* "успіхів".

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, подія A відбудеться рівно m разів і не відбудеться $(n-m)$ разів (в будь-якій послідовності) обчислюється за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{5.1}$$

Ймовірності $P_n(m)$ - називаються біноміальними. Сума біноміальних ймовірностей:

$$P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(n) = C_n^0 p^n q^0 + C_n^1 p^{n-1} q^1 + ... + C_n^n p^0 q^n = (p+q)^n = 1.$$

Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі подія A з'явиться не менше, ніж m_1 раз і не більше, ніж m_2 рази $(0 \le m_1 \le m_2 \le n)$. Тоді

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m). \tag{5.2}$$

Ймовірність того, що в результаті n випробувань подія A з'явиться хоча б один раз, можна розглядати через ймовірність протилежної події, тобто такої, що подія А не з'явиться у жодному з випробувань, отже, така ймовірність визначається за формулою:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n. \tag{5.3}$$

Приклад 5.1. Стрілець стріляє по мішені 4 рази, ймовірність влучення при кожному пострілі 0,8. Знайти ймовірність того, що було рівно *m* влучень, *m*=0,1,2,3,4.

Розв'язання. Задача відповідає схемі Бернуллі. Відбувається *n*=4 незалежних випробування (постріли по мішені), в кожному з яких подія А="влучення у мішень" відбувається з ймовірністю *p=0,8* та не відбувається з ймовірністю *q=0,2*. За формулою Бернуллі для *m=0,1,2,3,4* знайдемо:

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 1 \cdot 0,2^4 = 0,0016$$
$$P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,008 = 0,0256$$
$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 6 \cdot 0,64 \cdot 0,24 = 0,0153$$
$$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,64 \cdot 0,2 = 0,4096$$
$$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 1 \cdot 0,8^4 = 0,4096.$$

Перевіримо, що сума біноміальних ймовірностей дорівнює 1.

$$P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1.$$

Помітимо, що ймовірності $P_n(m)$ при зростанні m спочатку зростають, потім спадають. Існує таке значення $m = m^*$, при якому $P_n(m^*)$ має найбільше значення.

5.2. Найімовірніше число "*успіхів*" у схемі Бернуллі

Позначимо m^* – таке значення, при якому біноміальна ймовірність $P_n(m*)$ найбільша. Значення m^* називають найімовірнішим числом "успіхів" (появи події А). Число m^* – ціле, що знаходиться в межах:

$$np - q \le m* \le np + p. \tag{5.4}$$

Наприклад, якщо
$n = 4,\ p = 0.8, q = 0.2$, то $3.2 - 0.2 \le m* \le 3.2 + 0.8$, отже $m* = 3$ *або* $m* = 4.$

Зауважимо:

1. Якщо $np + p$ - не є цілим, тоді m^* - приймає одне значення.
2. Якщо $np + p$ є Z ціле число, то існує два значення $m* = np + p$ або $m* = np - q$.
3. Якщо np - ціле, тоді $m* = np$.

5.3. Наближені формули обчислення біноміальних ймовірностей

При великих значеннях n формула Бернуллі стає незручною для обчислень, тому застосовуються наближені формули.

5.3.1. Формула Пуассона

Якщо n – велике число, p – мале $(p < 0.1)$, $np < 10$,

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{де } \lambda = np. \tag{5.5}$$

Формулу Пуассона називають "формулою нечастих подій".

Зауваження. Якщо p близьке до 1, а q, відповідно, мале ($q<0,1$), тоді можна використовувати формулу Пуассона для обчислення ймовірностей числа "невдач", тобто числа випробувань, у яких подія А не з'явилася.

5.3.2. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо n – велике число (n>100), p,q –близькі до 0,5, то біноміальну ймовірність можна наближено знайти за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x) \quad , \tag{5.6}$$

де функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функція Гаусса , $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Для функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ складено таблиці (додаток 1) .

Властивості $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, функція парна;
2. $\varphi(x)$ - спадає при $x > 0$,
3. При збільшенні x до $+\infty$, $\varphi(x)$- зменшується до 0;

Для $x > 4$ приймаємо $\varphi(x) = 0$.

5.3.3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Позначимо $P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2)$ - ймовірність того, що m - кількість появи події А (число "успіхів") в серії n незалежних випробувань, знаходиться в межах від m_1 *до* m_2 .

Наближене значення цієї ймовірності можна знайти за формулою:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{5.7}$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Властивості $\Phi(x)$:

1. $\Phi(x)$- непарна, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. $\Phi(x)$ - зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\Phi(0) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0,5$.

Якщо $x > 5$, то $\Phi(x) = 0,5$.

Для функції $\Phi(x)$ складено таблиці (додаток 2).

Наслідок. Нехай у n випробуваннях за схемою Бернуллі подія A з'явилась k разів, тоді при досить великих n ймовірність того, що частота $\frac{k}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p на величину ε (за абсолютною величиною) обчислюється за формулою:

$$P\left(\left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon \right). \tag{5.8}$$

Запитання для самоконтролю

1. Які випробування називають схемою Бернуллі?

2. Ймовірності яких подій називаються біноміальними? Чому дорівнює сума біноміальних ймовірностей?

3. Запишіть формулу Бернуллі.

4. Що таке найімовірніше число «успіхів» у схемі Бернуллі? Як це число визначають?

5. В яких випадках потрібно використати формулу Пуассона? Запишіть формулу Пуассона.

6. Сформулюйте локальну теорему Муавра- Лапласа.

7. Яка функція називається функцією Гаусса? Назвіть її основні властивості.

8. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра- Лапласа.

9. Яка функція називається функцією Лапласа? Назвіть її основні властивості.

10. Сформулюйте наслідок про ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності.

Практичне заняття №5
СХЕМА БЕРНУЛЛІ

Приклади розв'язування задач

Задача 5.1. Гральний кубик підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що “5” очок випаде а) рівно 2 рази; б) менше 3 разів; в) хоча б один раз.

Розв'язання. Задача відповідає схемі Бернуллі. Відбувається n=6 незалежних випробувань (підкидання грального кубика), в кожному з яких подія А=“випало “5” очок” відбувається з імовірністю p і не відбувається з імовірністю q:

$$p=\frac{1}{6},\quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\quad .$$

а) За формулою Бернуллі (5.1) для $m=2$ знайдемо:

$$P_6(2)=C_6^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=15\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{625}{1296}=\frac{9375}{46656}\approx 0,201.$$

б) Подія В=”5 очок випало менше двох разів” є сумою подій: “5” очок випало 0, 1 або 2 рази. Тоді ймовірність події В:

$$P(B)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2).$$

За формулою Бернуллі (5.1) для *m=0,1,2* знайдемо: $P_6(0)=C_6^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15625}{46656}\approx 0,335$;

$$P_6(1)=C_6^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{18750}{46656}\approx 0,402;$$

З пп. а) $P_6(2)\approx 0,201$.

Отже, $P(B)\approx 0,335+0,402+0,201=0,938$.

в) Подія С=""5" очок випало хоча б один раз". Розглянемо протилежну подію $\overline{C}$ =""5" очок не випало жодного разу". З пп.б) : $P(\overline{C})=P_6(0)\approx 0,339$.

Отже, $P(C)=1-P(\overline{C})\approx 0,661$.

Відповідь: а) 0,201; б) 0.94; в) 0,661.

Задача 5.2. Ймовірність того, що пасажир запізниться на потяг дорівнює 0,02. Знайти найімовірніше число пасажирів, які запізнилися на потяг із 855 пасажирів.

Розв'язання. За умовою $n=855$, $p=0,02$, $q=0,98$. Знайдемо найімовірніше число m^* з нерівності (5.4).

$np-q\le m^*\le np+p$. Отримаємо:

$855\cdot 0,02-0,98\le m^*\le 855\cdot 0,02+0,02$ або $16,12\le m^*\le 17,12$.

Ціле число, що лежить в цих межах, $m^*=17$.

Відповідь: $m^*=17$.

Задача 5.3. Два рівносильних супротивники грають у шахи. Що ймовірніше виграти:

а) одну партію з двох чи дві з чотирьох?

б) не менше двох партій з чотирьох чи не менше трьох з п'яти?

Нічийний результат партії не враховуються.

Розв'язання. Оскільки грають рівносильні супротивники, то ймовірність виграшу $p=\frac{1}{2}$ та ймовірність поразки $q=1-p=\frac{1}{2}$. Оскільки в усіх партіях ймовірність виграшу однакова, то можна застосувати формулу Бернуллі (5.1).

а) Знайдемо ймовірність того, що виграно одну партію з двох:

$$P_2(1)=C_2^1p^1q^1=\frac{2!}{1!\cdot 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}.$$

Ймовірність виграти дві партії з чотирьох:

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

Оскільки $P_2(1)>P_4(2)$, то ймовірніше виграти одну партію з двох.

б) Обчислимо ймовірність виграти не менше двох партій з чотирьох:

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-(P_4(0)+P_4(1))=\frac{11}{16}.$$

Обчислимо ймовірність виграти не менше трьох партій з п'яти:

$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \dfrac{8}{16}$.

Отже, ймовірніше виграти не менше двох партій з чотирьох.

Задача 5.4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених дітей хлопчиків і дівчаток буде порівну.

Розв'язання. У даному випадку $n = 200$, $k = 100$, $p = 0{,}515$, $q = 1 - p = 0{,}485$.

Оскільки n і k достатньо великі, то застосовуємо локальну теорему Лапласа.

Знайдемо $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{100 - 200 \cdot 0{,}515}{\sqrt{200 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485}} \approx -0{,}424$.

За таблицею (див. дод. 1) знайдемо значення функції Гаусса: $\varphi(-0{,}424) = \varphi(0{,}424) = 0{,}3647$.

Тоді за формулою (5.6):

$$P_{200}(100) = \frac{\varphi(-0{,}424)}{\sqrt{200 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485}} = \frac{0{,}3647}{7{,}068} \approx 0{,}052.$$

Відповідь: 0,052.

Задача 5.5. За результатами перевірок фіскальними органами виявлено, що в середньому кожне друге мале підприємство регіону допускає порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з 1000 зареєстрованих у регіоні малих підприємств допускають порушення фінансової дисципліни від 480 до 520 малих підприємств.

Розв'язання. За умовою $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $n = 1000$, $m_1 = 480$, $m_2 = 520$. Застосуємо інтегральну теорему Муавра – Лапласа, за формулою (5.7):

$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{480 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -1{,}265,$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{520 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 1{,}265.$$

Значення функції Лапласа $\Phi(x)$ знайдемо з таблиці (див. дод. 2):

$$P_{1000}(480, 520) = 2\Phi(1{,}265) = 0{,}7924.$$

Відповідь: 0,7924.

Задача 5.6. Магазин отримав партію скляних пляшок молока. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка розіб'ється дорівнює $p = 0{,}06$. Скільки слід перевірити пляшок, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати, що відносна частота появи розбитих пляшок відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01?

Розв'язання. Оскільки, $p = 0,06$, $q = 1 - p = 0,94$, $\varepsilon = 0,01$, то. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{k}{n} - 0,06\right| < 0,01\right) = 0,9973$. За формулою запишемо: $2\Phi\left(0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,06 \cdot 0,94}}\right) = 0,9973$.

За таблицею (дод. 2) $\Phi(3) = 0,4986$, отже $0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,06 \cdot 0,94}} = 3$, $n = 5076$.

Відповідь: n=5076.

Задача 5.7. Підручник видано тиражем 10000 примірників. Ймовірність виготовлення бракованого примірника підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно 5 бракованих книг.

Розв'язання. За умовою $n = 10000$, $p = 0,0001, k = 5$. Оскільки n велике, а ймовірність p мала, і $\lambda = np = 1$, то за формулою Пуассона (5.5): $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1e^{-1}}{5!} = \frac{0,369}{120} \approx 0,004.$

Відповідь: 0,004.

Завдання для самостійного виконання

41. У сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) двоє дівчат; б) не більше двох дівчат. Вважати ймовірність народження дівчинки рівною 0,49.

42. Ймовірність банкрутства однієї з шести компаній на кінець року дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що на кінець року збанкротують не більше двох компаній.

43. Кожне з семи підприємств харчової промисловості виконує місячний план з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в кінці місяця план виконають принаймні п'ять підприємств.

44. Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Ймовірність того, що кожен із зразків буде придатний до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визначить придатними до продажу.

45. Батарея провела 6 пострілів по воєнному об'єкту. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти: а) найімовірніше число влучень; б) ймовірність найімовірнішого числа влучень; в) ймовірність того, що об'єкт буде зруйнований, якщо для цього достатньо принаймні два влучення.

46. Ймовірність появи події у кожному із 100 незалежних випробувань однакова і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться: а) не менше 75 разів і не більше 80; б) не менше 75 разів; в) не більше 74 разів.

47. Застосовуючи а) формулу Бернуллі; б) локальну теорему Лапласа і в) формулу Пуассона знайти ймовірність того, що серед 200 осіб виявиться четверо шульгів, якщо у середньому шульги становлять 1%.

48. Скільки треба посіяти зерен, проростання яких складає 70%, щоб найімовірніше число зерен, які не зійшли, дорівнювало 60?

49. Нехай ймовірність того, що покупцю необхідно купити взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що із 750 покупців не більше ніж 120 потрібне взуття 41-го розміру.

50. При наборі довільного слова з тексту наборщик робить помилку з ймовірністю 0,001. Яка ймовірність того, що в набраній статті, яка має 3000 слів, буде не більше чотирьох помилок?

Відповіді

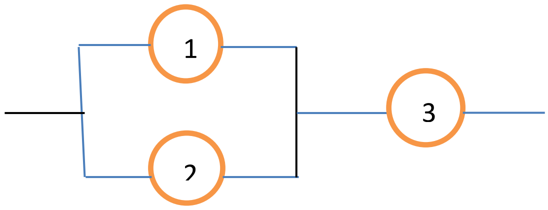
11. 8. **12.** 11. 1**3.** 16. **14.** 7. **15. а)** $n = 2$.**б)** $n = 20$. **16.** а) так; б) так; в) ні; г) так; д) так; е) так; є) ні; ж) ні. **17.** 102,140. **18.** $\frac{n}{n+m-1}$. **19.** 0,6. **20.** $\frac{2}{\pi}$. **21.** а) $\frac{1}{216}$; б) $\frac{1}{36}$. **22.** а)0,697 б) 0,957. **23.** 0,727. **24.** 0,504. **25.** 0,14. **26.** 0,7. **27.** 0,18. 2**8.** 0,201. **29.** 0,576. **30. А)** 0,786. **Б)** 0,816. **31.** $\frac{8}{81}$. **32.** 0,387. **33.** 0,44; 0,25. **34.** 0,69. **35.** 0,92. **36.** 0,38. **37.** 0,29. **38.** $\frac{11}{18}$. **39.** $\frac{2}{3}$. **40.** 0,38. **41. а)** 0,318 **б)** 0,477. **42.** 0,837. **43.** 0,85. **44.** 14. **45.** а) 4; б) 0,31; в) 0,96.
46. $P_{100}(75 \le k \le 80) \approx 0{,}39; P_{100}(75 \le k \le 100) \approx 0{,}89; \ P_{100}(75 \le k \le 100) \approx 0{,}11$.
47. 0,9002; 0,1453; 0,9002 . **48.** 200. **49.** 0,0031. **50.** 0,63.

Підсумковий контроль

Варіанти контрольної роботи з теми “Ймовірності випадкових подій”

Варіант №1

1.Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів 1, 2, 3 відповідно дорівнюють $p_1 = 0,8$, $p_2 = p_3 = 0,9$.



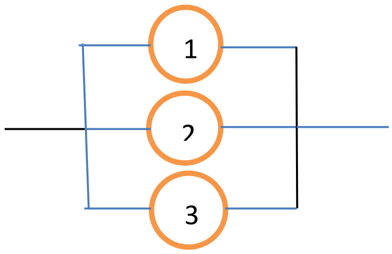
2. На екскурсію поїхало 10 чоловік: 6 Назаренків та 4 Іванченків. Їх розсадили по 5 у різні автобуси. Яка ймовірність того, що всі Іванченки опинилися в одному автобусі?

3. У І шафі знаходиться 10 книжок, серед яких 7 художніх, у ІІ шафі - 9 книжок, серед яких 5 художніх. З І шафи наосліп виймається 1 книжка та перекладається у ІІ шафу. Після цього з ІІ шафи вибирається 1 книжка. Яка ймовірність того, що вона художня?

4. Посіяно 100 насінин. Знайти ймовірність того, що зійшло не менше ніж 85 насінин, якщо ймовірність проростання цього насіння 80%.

Варіант №2

1.Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів 1, 2, 3 відповідно дорівнюють $p_1 = 0,8$, $p_2 = p_3 = 0,9$.



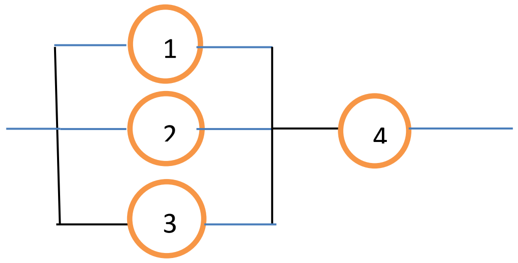
2. На конференцію прибуло 20 чоловік: 16 молодих спеціалістів-науковців та 4 досвідчених науковців (кожен з науковців робить 1 доповідь). У перший день заплановано 10 доповідей. Яка ймовірність того, що всі досвідчені науковці доповідають в перший день?

3. На перевірку надійшло три партії однотипних виробів: у І партії – 40 виробів, у ІІ – 40, у ІІІ – 20. Серед виробів І партії з ймовірністю 0,1 зустрічаються неякісні вироби, серед виробів ІІ партії такі вироби зустрічаються із ймовірністю 0,2, у ІІІ партії – із ймовірністю 0,3. Для перевірки вибрано один виріб. Яка ймовірність того, що він якісний?

4. Знайти ймовірність того, що серед 100 перевірених приладів було рівно 95 якісних, якщо ймовірність того, що прилад якісний дорівнює 0,9.

Варіант №3

1. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів 1, 2, 3 відповідно дорівнюють $p_1 = p_2 = 0,8$, $p_3 = p_4 = 0,9$.



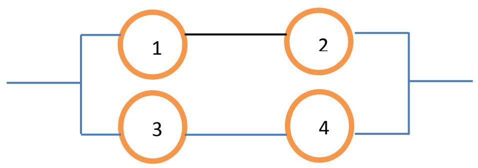
2. У групі 12 дівчат та 6 хлопців. Навмання вибрано 9 чоловік з групи. Знайти ймовірність того, що серед них 6 дівчат та 3 хлопців.

3. На перевірку надійшло три партії однотипних виробів: у І партії – 20 виробів, у ІІ – 40, у ІІІ – 40. Серед виробів І партії з ймовірністю 0,2 зустрічаються неякісні вироби, серед виробів ІІ партії такі вироби зустрічаються із ймовірністю 0,3, у ІІІ партії – із ймовірністю 0,1. Для перевірки вибрано один виріб, який виявився якісним. Яка ймовірність того, що він з І партії?

4. Монету підкидають 10 разів. Яка ймовірність того, що «герб» випаде рівно 6 разів?

Варіант №4

1. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів 1, 2, 3 відповідно дорівнюють $p_1 = 0,9$, $p_2 = p_3 = 0,7$, $p_4 = 0,8$,.



2. Серед 10 конкурсантів, серед яких 5 дівчат та 5 хлопців, відбулося жеребкування. Яка ймовірність того, номери з 1 по 5 отримали дівчата, а номери з 6 по 10 хлопці?

3. У І урні знаходиться 10 куль, серед них 7 білих, у ІІ урні - 9 куль, серед яких 4 білих. З І урни наосліп виймається 1 куля та перекладається у ІІ урну. Після цього з ІІ урни дістається 1 куля. Яка ймовірність того, що ця куля є білою?

4. Гральний кубик підкидають 6 разів та спостерігають за появою «5». Яка ймовірність того, що «5» випала хоча б один раз?

Додатки

Додаток 1. Таблиця значень функції Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3863	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2703	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4669
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2965	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,4986
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,4993
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,4996
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,4998
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,4999
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,4999
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,4999
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,4999
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3185	1,55	0,4994	2,14	0,4838		

ЛІТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, Вища школа, 1979
2. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1988
4. Дороговцев А. Я, Сільвестров Д. С., Скорохол А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей (збірник задач), Київ, Вища школа, 1977
5. Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей, Киев, Высшая школа, 1990
6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособ. для вузов – М.: Высш. шк., 2005. – 404 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособ. – 12-е изд. - М.: Высш. образование., 2007. – 479 с.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1, М., Мир, 1984
9. Жлуктенко, В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: у 2-х ч. – Ч.1 Теорія ймовірностей. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
10. Медведєв, М.Г. Теорія ймовірностей та математична статистика : підруч. / М.Г. Медведєв, І.О. Пащенко – К.: «Ліра-К», 2008. – 536 с.
11. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008
12. Листопад В.В., Островська О.В. Практикум з теорії ймовірностей із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій [Електронний ресурс]:навчальний посібник – К.: НУХТ, 2016. – 103 с.